Bernoulli Resolve

Matemática

6V **Volume 6**

Sumário - Matemática

Frente A

Frente B

Frente C

Frente D

Frente E

COMENTÁRIO E RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

MÓDULO – A 11

Probabilidades I

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: Seja o número de elementos do espaço amostral **E** dado por n(E). Temos n(E) = 36.

Seja **A** o evento "obter dois números consecutivos, cuja soma é um número primo". Temos:

$$A = \underbrace{(1, 2), (2, 1)}_{\text{soma} = 3}, \underbrace{(2, 3), (3, 2)}_{\text{soma} = 5}, \underbrace{(3, 4), (4, 3)}_{\text{soma} = 7}, \underbrace{(5, 6), (6, 5)}_{\text{soma} = 11}$$

n(A) = 8

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Observando que de 11 a 19 existem cinco números ímpares e quatro números pares, segue que o primeiro e o último cartão devem ser, necessariamente, ímpares. Desse modo, existem 5! modos de dispor os cartões ímpares e 4! modos de dispor os cartões pares.

Portanto, como existem 9! maneiras de empilhar os nove cartões aleatoriamente, a probabilidade pedida é

$$\frac{5!.4!}{9!} = \frac{5!.4.3.2}{9.8.7.6.5!} = \frac{1}{126}$$

Questão 03 – Letra D

Comentário:

$$20 \text{ bolas} = \begin{cases} x \text{ azuis} \\ 20 - x \text{ brancas} \end{cases}$$

$$p = \frac{x}{20}$$

Após a retirada de uma bola azul e outra branca, a probabilidade de se retirar uma bola azul p' tornou-se igual a $p' = \frac{x-1}{18}$.

Mas $p' = p - \frac{1}{36}$. Logo, temos:

$$\frac{x-1}{18} = \frac{x}{20} - \frac{1}{36} \Rightarrow$$

$$\frac{10x - 10}{180} = \frac{9x - 5}{180} \Rightarrow x = 5$$

Questão 04 – Letra B

Comentário: A quantidade de maneiras diferentes de se entregar as 3 medalhas (ouro, prata e bronze) entre os 20 corredores é dada por $C_{20,3}$. Já em cada uma das equipes **A**, **B** e **C** temos $C_{9,3}$, $C_{5,3}$ e $C_{6,3}$ maneiras, respectivamente.

Logo a probabilidade percentual das 3 medalhas serem entregues a uma mesma equipe é dada por

$$P = \frac{C_{9,3} + C_{5,3} + C_{6,3}}{C_{20,3}} = \frac{84 + 10 + 20}{1\,140} = \frac{1}{10}.100\% = 10\%$$

Então, $10 \in [10, 12[$.

Questão 05

Comentário:

A) x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 50 ⇒ 4x = 44 ⇒ x = 11

B) Temos:

i) 11 bolas brancas, numeradas de 1 a 11.

ii) 12 bolas azuis, numeradas de 1 a 12.

iii) 13 bolas amarelas, numeradas de 1 a 13.

iv) 14 bolas verdes, numeradas de 1 a 14.

Sejam os seguintes eventos:

Evento **A**: Retirar uma bola azul.

Evento **B**: Retirar uma bola com o número 12.

$n(A) = 12$, $n(B) = 3$ e $n(A \cap B) = 1$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow$

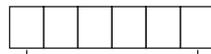
$$p(A \cup B) = \frac{12}{50} + \frac{3}{50} - \frac{1}{50} = \frac{7}{25}$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: Espaço amostral:

N. de anagramas: n(E) = 6! = 720

Evento **A**: A primeira e a última letras são consoantes.

$$n(A) = 4 . \; P_4 \; .3 = 4.4!.3 = 288$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{288}{720} = \frac{2}{5}$$

Questão 03 – Letra D

Comentário:

$n(E) = C_{50,\,8}$ e $n(A) = C_{47,\,5}$. Logo:

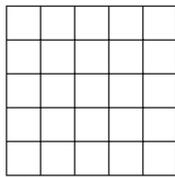
$$P(A) = \frac{C_{47,\,5}}{C_{50,\,8}} = \frac{\frac{47!}{42!.5!}}{\frac{50!}{42!.8!}} = \frac{1}{350}$$

Questão 05 – Letra D

Comentário:

$n(E) = C_{25,5} = \frac{25!}{5!.20!}$

Espaço amostral (**A**)

Para que duas garrafas não fiquem numa mesma fila, temos que posicionar cada uma delas em uma coluna do seguinte modo:

$n(A) = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5!$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{5!}{\frac{25!}{5!.20!}} = \frac{5!.5!.20!}{25!}$$

Questão 06 – Letra A

Comentário:

x = abc e n(E) = 6.6.6 = 216

Sejam os eventos:

A: Obter um número divisível por 2.

	1º Lançamento		2º Lançamento		3º Lançamento	
	↓		↓		↓	
n(A) =	6 possib.	.	6 possib.	.	3 possib.	= 108

B: Obter um número divisível por 5.

	1º Lançamento		2º Lançamento		3º Lançamento	
	↓		↓		↓	
n(B) =	6 possib.	.	6 possib.	.	1 possib.	= 36

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow$

$$p(A \cup B) = \frac{108}{216} + \frac{36}{216} - 0 = \frac{144}{216} = \frac{8}{12}$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: Pessoas com fatores de risco: 20% de 300 = 60.

$$P = \frac{C_{60,2}}{C_{300,2}} = \frac{\frac{60.59}{2}}{\frac{300.299}{2}} = \frac{30.59}{150.299} = \frac{59}{1495}$$

Questão 09 – Letra C

Comentário: Espaço amostral **E**:

$n(E) = C_{5,3} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

Evento **A**: Escolher 3 vértices que pertençam à mesma face.

Do total de 10 grupos possíveis, observe que apenas os grupos $V_1V_4V_3$, $V_1V_5V_3$, $V_1V_2V_3$ e $V_4V_5V_2$ não estão em uma mesma face.

Logo, os 6 grupos restantes constituem o evento **A**.

Portanto, $p(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Questão 10 – Letra C

Comentário: Sejam p(1) a probabilidade de sair a face 1 e p(6) a probabilidade de sair a face 6.

Fazendo p(1) = x, temos p(6) = 2x.

Sejam p(2), p(3), p(4) e p(5) as probabilidades de saírem as faces 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

Temos que $p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = \frac{1}{6}$.

Além disso, temos que:

p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1

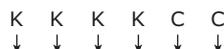
$x + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

Logo, $p(1) = \frac{1}{9}$.

Questão 11 – Letra A

Comentário: Consideremos a seguinte configuração:

K K K K C C

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

Devemos, agora, escolher 4 posições, entre as 6 possíveis para posicionar **K**.

Isso pode ser feito de $C_{6,4} = \frac{6!}{2!.4!} = 15$ modos.

(Observe que também podemos permutar, com repetições, as letras **K** e **C**).

A probabilidade pedida é $p = \frac{1}{64}.15 = \frac{15}{64}$.

Questão 13 – Letra E

Comentário: Temos 12 possíveis valores para **a** e 9 possíveis valores para **b**. O número de frações possíveis é 12.9 = 108. O denominador deverá ser par, então o numerador deverá ser ímpar para que a fração seja irredutível. Temos, então, as seguintes possibilidades.

Valores para a = 11, 13, 15, 17 , 19 e 21 e valores para b = 44, 46, 48, 50, num total de 6.4 = 24 frações.

Das quais deverão ser retiradas as seguintes frações redutíveis: $\frac{11}{44}, \frac{15}{48}, \frac{21}{48}$, e $\frac{15}{50}$, ficamos com 20 possibilidades num total de 108 frações.

Calculando a probabilidade, temos: $P = \frac{20}{108} = \frac{5}{27}$.

Questão 19

Comentário: Seja **E** o espaço amostral.

Temos que $n(E) = C_{n,6}$.

Consideremos o evento **A**: "provoca uma explosão". Temos: $n(A) = C_{n-2,4}$

Mas $p(A) = \frac{1}{14}$. Logo,

$$\frac{C_{n-2,4}}{C_{n,6}} = \frac{1}{14} \Rightarrow \frac{\frac{(n-2)!}{(n-6)!.4!}}{\frac{n!}{(n-6)!.6!}} = \frac{1}{14} \Rightarrow$$

$n^2 - n - 420 = 0 \Rightarrow$

n = 21 (convém)
n = –20 (não convém)

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: A probabilidade é dada por $p = \frac{24}{34} = \frac{12}{17}$.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário:

Espaço amostral:

E = {TVE, TEV, VET, VTE, ETV, EVT}   n(E) = 6

Seja **A** o evento "não ganhar prêmio".

A = {VET, ETV}, ou seja, n(A) = 2.

$p(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Para ganhar R$ 400,00, o concorrente deverá acertar a posição de apenas duas letras. Entretanto, nesse caso, a terceira letra também estará na posição correta.

Portanto, a probabilidade de ganhar apenas R$ 400,00 é igual a zero.

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: V

Competência de área: 7

Habilidade: 30

Comentário: A soma das áreas de alcance das antenas **A** e **B** equivale a um semicírculo de raio 10 km. Assim, temos:

$$\frac{\pi.10^2}{2} = \frac{100\pi}{2} = 50\pi \text{ km}^2$$

A probabilidade é igual a $p = \frac{50\pi}{628} \quad \frac{50.3,14}{628} \cong 0,25 \cong 25\%$.

Questão 05 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: A classificação dos times foi a seguinte:

	2004	2005
1º colocado	B	C
2º colocado	D	B
3º colocado	C	A
4º colocado	A	D

Observe que não há possibilidade de um time ter obtido a mesma classificação.

Questão 06 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 7

Habilidade: 29

Comentário: O número de elementos do espaço amostral é dado por n(E) = 6.6 = 36.

Temos os seguintes eventos:

A: camisa 6 = {(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)} $\Rightarrow$ n(A) = 5

B: camisa 2 = {(1, 1)} $\Rightarrow$ n(B) = 1

C: camisa 12 = {(6, 6)} $\Rightarrow$ n(C) = 1

$P(A) = \frac{5}{36}$, $P(B) = \frac{1}{36}$ e $P(C) = \frac{1}{36}$

Observe que P(A) > P(B) + P(C).

Questão 07 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Como a temperatura ideal está entre 2 °C e 4 °C, apenas a peixaria **V** satisfaz essa condição.

Portanto, a probabilidade pedida é igual a $\frac{1}{5}$.

Questão 08 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: A população com 60 anos ou mais corresponde a 461 milhões de habitantes. Esse número está entre 30% e 35% da população total.

A alternativa mais adequada é $\frac{8}{25} = 0,32 = 32\%$.

Questão 09 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Para cada aposta há 6 quinas. Logo, em 84 apostas, temos 84.6 = 504 quinas.

Com 9 dezenas, temos $C_{9,\,5} = \frac{9!}{4!.5!} = 126$ quinas.

Temos $\frac{504}{126} = 4$, ou seja, a probabilidade de acertar a quina no 2º caso é a quarta parte do 1º caso.

Questão 10 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: O total de bolas é igual a 7. Existem 2 bolas na linha 4 e 2 bolas na linha 5. Portanto, as linhas 1, 2 e 3 possuem 1 bola cada. A probabilidade pedida é dada por:

$$P = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{Linha 1}} . \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{Linha 2}} . \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{Linha 3}} . \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{Linha 4}} . \underbrace{\frac{2}{2}}_{\text{Linha 5}} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

Questão 11 – Letra E

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 7

Habilidade: 29

Comentário: O total de filhos é igual a 7.1 + 6.2 + 2.3 = 25, sendo 7 filhos únicos. Portanto, a probabilidade de a criança ser filho(a) único(a) é igual a $\frac{7}{25}$.

Questão 12 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: $P = \frac{12}{52+15+12} = \frac{12}{79} \quad 0{,}15$

Questão 13 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 7

Habilidade: 29

Comentário:

- Resultados que darão a vitória a José:
  {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}
- Resultados que darão a vitória a Paulo:
  {(1.3), (2,2), (3,1)}
- Resultados que darão a vitória a Antônio:
  {(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)}

José tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

MÓDULO – A 12

Probabilidades II

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: Ao se definir o espaço amostral, usa-se a seguinte notação:

H: Homem e **M**: Mulher

O espaço amostral é dado por:

E = {(H, H, H), (H, H, M), (H, M, H), (H, M, M), (M, H, H), (M, H, M), (M, M, H), (M, M, M)}

n(E) = 8

Seja **A** o evento "pelo menos um filho é homem". Observe que n(A) = 7. Logo:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{7}{8} = 0{,}875 = 87{,}5\%$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Se **x** é o número de habitantes da cidade, então 0,25x contraíram a gripe. Logo, 0,80.0,25x = 0,20x contraíram gripe e tiveram febre.

Funcionários que apresentaram febre por outros motivos: 0,08.0,75x = 0,06x.

Funcionários com febre: 0,20x + 0,06x = 0,26x.

Portanto, a probabilidade dos funcionários que apresentaram febre durante o surto de gripe foi de:

$$P = \frac{0{,}26x}{x} = 26\%$$

Observação: Para atender ao gabarito oficial, a solução leva em consideração 8% dos funcionários que não apresentaram a gripe.

Questão 03 – Letra D

Comentário: Como um dos entrevistados não vota em **B**, o espaço amostral fica reduzido. Portanto, a probabilidade de ele votar em branco é dada por:

$$p = \frac{20\%}{60\%} = \frac{1}{3}$$

Questão 04

Comentário:

A) 3 pretas, 5 brancas e **x** azuis

Sendo p(A) a probabilidade de se retirar uma bola azul, temos:

$$p(A) = \frac{x}{8+x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 16$$

Portanto, devem ser acrescentadas 16 bolas azuis.

B) 1 preta, 4 brancas e **x** azuis

Seja **p** a probabilidade de que as bolas sejam da mesma cor.

Temos:

$$p = \underbrace{\frac{1}{5+x}}_{\text{Preta}} \text{ e } . \underbrace{\frac{1}{5+x}}_{\text{Preta}} \text{ ou } + \underbrace{\frac{4}{5+x}}_{\text{Branca}} \text{ e } . \underbrace{\frac{4}{5+x}}_{\text{Branca}} \text{ ou } + \underbrace{\frac{x}{5+x}}_{\text{Azul}} \text{ e } . \underbrace{\frac{x}{5+x}}_{\text{Azul}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{17+x^2}{(5+x)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 9$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: A probabilidade de sair um número par é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e a probabilidade de sair face coroa é $\frac{1}{2}$. Portanto, como os eventos são independentes, a probabilidade pedida é dada por: $\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: A probabilidade pedida é dada por:

$$P = \underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{Possuir } x_1} . \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{Sobreviver}} + \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{Possuir } x_2} . \underbrace{\frac{5}{6}}_{\text{Sobreviver}} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$$

Questão 02

Comentário:

A) A probabilidade pedida é dada por:

$$P = \underbrace{0{,}1}_{\text{Suspeita}} . \underbrace{0{,}2}_{\text{Fraudulenta}} = 0{,}02 = 2\%$$

B) P(s/f): Probabilidade de ela ser suspeita, sendo fraudulenta.

$P(s \cap f)$: Probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta.

P(f): Probabilidade de ela ser fraudulenta.

Temos:

$$P(s \cap f) = \underbrace{0{,}1}_{\text{Suspeita}} . \underbrace{0{,}2}_{\text{Fraudulenta}} = 0{,}02$$

$$P(f) = \underbrace{0{,}1}_{\text{Suspeita}} . \underbrace{0{,}2}_{\text{Fraudulenta}} + \underbrace{0{,}9}_{\text{Não suspeita}} . \underbrace{0{,}02}_{\text{Fraudulenta}} = 0{,}038$$

Logo, temos:

$$P(s/f) = \frac{0{,}02}{0{,}038} = 0{,}526 = 52{,}6\%$$

Questão 04 – Letra D

Comentário: Calculando as probabilidades, obtemos:

$$P(I) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{8}{32}$$

$$P(II) = \binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} = 4.\frac{1}{16} = \frac{8}{32}$$

$$P(III) = \binom{8}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8.7.6}{3.2}.\frac{1}{32}.\frac{1}{8} = \frac{7}{32}$$

Portanto, P(I) = P(II) > P(III).

Questão 06 – Letra C

Comentário: Como o ensaio será feito sem reposição, temos:

$$P = \frac{490}{500}.\frac{489}{499}.\frac{488}{498}.\frac{487}{597}.\frac{486}{496}$$

Questão 07 – Letra A

Comentário: Partindo de **A**, o robô deverá passar por 2 vértices antes de chegar em **B**. Considere o seguinte esquema:

$$\underbrace{P_1 = \frac{1}{3}}_{A \to \text{ Vértice 1}} \quad \underbrace{P_2 = \frac{1}{2}}_{\text{Vértice 1} \to \text{ Vértice 2}} \quad \underbrace{P_B = \frac{1}{1}}_{\text{Vértice 2} \to B}$$

Em que P_1, P_2 e P_B são as probabilidades de o robô escolher os vértices 1, 2 e **B**, respectivamente. Portanto, a probabilidade pedida é dada por:

$$P = P_1.P_2.P_B = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{1} = \frac{1}{6}$$

Questão 09 – Letra E

Comentário: Sejam P(c) e P(k) as probabilidades de se obter cara **c** e coroa **k**, respectivamente. Temos, P(c) = 4.P(k). Mas:

$$P(c) + P(k) = 1 \Rightarrow 4.P(k) + P(k) = 1 \Rightarrow P(k) = \frac{1}{5}$$

Em 2 lançamentos, temos: $P = \frac{1}{5}.\frac{1}{5} = \frac{1}{25} \Rightarrow P = 0,04$.

Questão 10 – Letra B

Comentário: Sejam os eventos:

A: Obter soma igual a 5 (**A** ganhar)

B: Obter soma igual a 8 (**B** ganhar)

Temos:

A = {(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)}

B = {(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)}

Como **A** não ganhou, o espaço amostral possui 36 – 4 = 32 elementos. Portanto, a probabilidade de **B** ter ganhado é igual a $\frac{5}{32}$.

Questão 12 – Letra A

Comentário: A probabilidade de acertar a questão marcando uma alternativa ao acaso é $\frac{1}{4}$ e a de errar é $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Tomando as respostas de dois alunos quaisquer da turma, temos os seguintes casos favoráveis:

i. um aluno está entre os 20% que marcaram a opção correta e o outro está entre os 80% que marcaram a resposta errada ao acaso;

ii. os dois alunos estão entre os 80% que marcaram a resposta ao acaso, tendo um deles acertado a questão e o outro errado.

Logo, a probabilidade de (i) ocorrer é

$$0,2.0,8.\frac{3}{4} + 0,8.\frac{3}{4}.0,2 = 0,24$$

enquanto que a probabilidade de (ii) ocorrer é

$$0,8.\frac{1}{4}.0,8.\frac{3}{4} + 0,8.\frac{3}{4}.0,8.\frac{1}{4} = 0,24$$

Portanto, a probabilidade pedida é igual 0,24 + 0,24 = 0,48.

Questão 13

Comentário: A probabilidade pedida é dada por:

$$P = \underbrace{0,75}_{\text{Chover}}.\underbrace{0,6}_{\text{Chegar ao pódio}} + \underbrace{0,25}_{\text{Não chover}}.\underbrace{0,2}_{\text{Chegar ao pódio}} = 0,45 + 0,05 = 0,5 = 50\%$$

Questão 20 – Letra D

Comentário: Pela Lei Binomial de Probabilidade, temos:

$$P = \binom{12}{6}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6 = \frac{12!}{6!.6!}.\frac{1}{5^6}.\frac{(2^2)^6}{5^6} = 924.\frac{2^{12}}{5^{12}} = 924.\left(\frac{2}{5}\right)^{12}$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Considere o espaço amostral a seguir:

E = {(H, H, H), (H, H, M), (H, M, H), (H, M, M), (M, H, H), (M, H, M), (M, M, H) (M, M, M)}

Em que **H** é o número de homens, e **M** é o número de mulheres.

Seja **A** o evento "ter exatamente dois filhos homens". Temos:

A = {(H, H, M), (H, M, H), (M, H, H)}

Portanto, $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{3}{8} = 0,375 \Rightarrow P(A) = 37,5\%$

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário:

1ª opção: $X = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\% \Rightarrow X = 30\%$

2ª opção: Nesse caso, é conveniente calcularmos $\overline{Y}$, ou seja, a probabilidade de o apostador não ganhar. Temos:

$$\overline{Y} = \underbrace{\frac{8}{10}}_{\text{Não ganhar no 1º sorteio}} \cdot \underbrace{\frac{9}{10}}_{\text{Não ganhar no 2º sorteio}} = \frac{72}{100} = 72\%$$

Logo, Y = 100% – 72% = 28% ⇒ Y = 28%

3ª opção: Analogamente, o problema fica mais simples se calcularmos $\overline{Z}$ primeiro. Temos:

$$\overline{Z} = \frac{9}{10}.\frac{9}{10}.\frac{9}{10} = 72,9\%$$

Z = 100% – 72,9% = 27,1% ⇒ Z = 27,1%

Portanto, X > Y > Z.

Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Conforme calculado na questão 02, temos:

$$\overline{Y} = \frac{8}{10}.\frac{9}{10} = \frac{72}{100} = 72\%$$

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário:

Pelo método I:

- Aluno do diurno: $P = \frac{1}{2}.\frac{1}{300} = \frac{1}{600}$
- Aluno do noturno: $P = \frac{1}{2}.\frac{1}{240} = \frac{1}{480}$

Pelo método II:

- Aluno do diurno: $P = \frac{1}{16}.\frac{1}{30} = \frac{1}{480}$
- Aluno do noturno: $P = \frac{1}{16}.\frac{1}{40} = \frac{1}{640}$

Observe que, no método I, a chance de ser sorteado um aluno do noturno é maior do que a de um aluno do diurno. No método II, ocorre o contrário.

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: A probabilidade pedida é dada por:

$$p = \underbrace{\frac{25}{100}}_{\text{Verde na 1ª}} \cdot \underbrace{\frac{25}{100}}_{\text{Verde na 2ª}} = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

e

Questão 06 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Como a funcionária escolhida tem calçado maior que 36,0, o espaço amostral fica reduzido. Portanto, o espaço amostral **E** é dado por:

E = 3 + 10 +1 = 14

Seja **A** o evento "tamanho do calçado igual a 38,0". Observe que n(A) = 10. Logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

Questão 07 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Do enunciado temos:

Caminhos	Probabilidade de não pegar engarrafamento em nenhuma via	Probabilidade de pegar engarrafamento em pelo menos um trecho
E_1E_3	(1 – 0,8).(1 – 0,5) = 0,10	1 – 0,10 = 0,90
E_1E_4	(1 – 0,8).(1 – 0,3) = 0,14	1 – 0,14 = 0,86
E_2E_5	(1 – 0,7).(1 – 0,4) = 0,18	1 – 0,18 = 0,82
E_2E_6	(1 – 0,7).(1 – 0,6) = 0,12	1 – 0,12 = 0,88

Portanto, o melhor trajeto para Paula é o E_2E_5, pois é o trajeto com menor probabilidade de engarrafamento possível.

Questão 08 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: A probabilidade de que ocorra efeito colateral na 1ª dose é 0,10.

A probabilidade de que ocorra efeito colateral na 2ª dose é 0,90.0,10 = 0,09.

A probabilidade de que ocorra efeito colateral na 3ª dose é 0,90.0,90.0,10 = 0,081.

A probabilidade de que ocorra efeito colateral na 4ª dose é 0,90.0,90.0,90.0,10 = 0,0729.

Somando essas probabilidades temos:

0,10 + 0,09 + 0,081 + 0,0729 = 0,3439 = 34,39% < 35%

Portanto, o maior número de doses possíveis para um risco de até 35% são 4 doses.

Questão 09 – Letra E

Eixo Cognitivo: IV

Competência de área: 7

Habilidade: 29

Comentário: As cores que podem ficar com o maior número de bolas, após o procedimento de retirada e depósito, são a verde (3 ou 4) e a vermelha (4). A probabilidade de retirar uma bola verde da urna 2 é $\frac{9}{10}.\frac{3}{11} + \frac{1}{10}.\frac{4}{11} = \frac{31}{110}$.

Já a probabilidade de retirar uma bola vermelha da urna 2 é

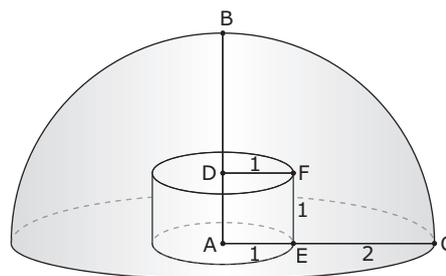
$\frac{10}{10}.\frac{4}{11} = \frac{40}{110}$. Portanto, o jogador deve escolher a cor vermelha.

MÓDULO – B 11

Esferas

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: O volume do sólido gerado pela rotação de 360° do quadrante do círculo ABC em torno AB é a diferença entre o volume da meia esfera de raio 3 cm e o volume do cilindro de raio 1 cm.

Logo, $V = \frac{V_e}{2} - V_{ci} \Rightarrow V = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi(3)^3 - \pi.(1)^2.1 \Rightarrow V = 17\pi\ cm^3$.

Questão 02 – Letra D

Comentário: O volume do porta-joias **V** será igual à diferença entre o volume do cubo de aresta igual a 10 cm e o volume de uma esfera de raio igual a 4 cm, logo:

$$V = V_{Cubo} - V_{Esfera} \qquad V = 10^3 - \frac{4}{3}.\pi.4^3$$

$$V = 1\,000 - \frac{4}{3}.3.64 \qquad V = 1\,000 - 256 = 744 \text{ cm}^3$$

Sabendo que a densidade da madeira utilizada na confecção do porta-joias era igual a 0,85 g/cm³, temos que:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ cm}^3 & \text{——} \; 0{,}85 \text{ g} \\ 744 \text{ cm}^3 & \text{——} \; \underbrace{x \text{ g}}_{\text{Massa do porta-joia}} \end{array} \Rightarrow x = 744.0{,}85 = 632{,}4 \text{ g}$$

Portanto, a massa do porta-joias é aproximadamente igual a 632 gramas.

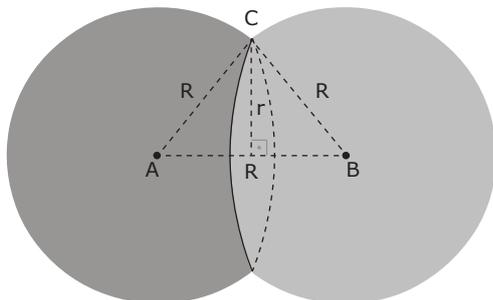
Questão 03 – Letra B

Comentário: Seja um cilindro de raio 4 cm e altura 10 cm. Assim, seu volume é $V_{ci} = \pi(4)^2.10 \Rightarrow V_{ci} = 160\pi$ cm³.

Derretendo esse cilindro, conseguimos fabricar **K** esferas de raio 2 cm, ou seja, o volume do cilindro será igual ao volume das **K** esferas.

Assim, $V_{ci} = K.V_e \Rightarrow 160\pi = K.\frac{4}{3}\pi(2)^3 \Rightarrow K = 15$. Portanto, a partir do cilindro, conseguimos fabricar 15 esferas.

Questão 04 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir:

O Δ ABC é equilátero de lado **R** possui altura igual ao raio **r** da parede de contato circular formada pela interseção entre as duas bolhas de sabão, logo $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, a parede de contato entre as bolhas possui uma área igual a $\pi.\underbrace{\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}_{\text{raio}} = \frac{3\pi R^2}{4}$.

Questão 05

Comentário:

A) A área da superfície esférica da melancia de raio **R** cm é $A = 4\pi R^2$ cm². Como a melancia foi cortada em 12 fatias iguais, a área da casca de cada uma das suas fatias, A_f, vale:

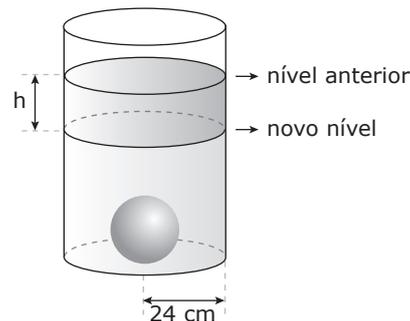
$$A_f = \frac{4\pi R^2}{12} \Rightarrow A_f = \frac{\pi R^2}{3} \text{ cm}^2$$

B) A área total de cada fatia da melancia é a soma das áreas de duas meias-circunferências e da área da fatia.

Assim, $A_T = 2.\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{3} \Rightarrow A_T = \frac{4\pi R^2}{3}$ cm².

Exercícios Propostos

Questão 02 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:

Ao mergulhar a esfera no cilindro o volume de líquido deslocado é igual ao volume da esfera, que por sua vez é igual ao volume de um cilindro de raio igual a 24 cm e altura igual a **h** cm. Logo:

$$V_{Esfera} = \underbrace{V_{L.\ deslocado}}_{\text{V. cilindro de altura } \mathbf{h}} \qquad \frac{4}{3}.\pi.12^3 = \pi.24^2.h \qquad 2\,304 = 576h$$

$$h = \frac{2\,304}{576} \qquad h = 4 \text{ cm}$$

Portanto, ao mergulhar e ao retirar a esfera do cilindro, o nível da água aumenta e abaixa 4 cm.

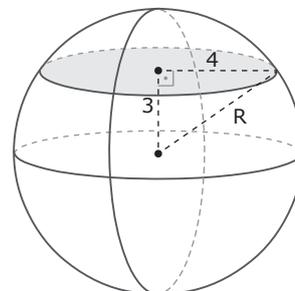
Questão 03 – Letra E

Comentário: Seja **k** o número total de alvéolos pulmonares. Como os **k** alvéolos têm a forma de uma esfera de 0,02 cm de diâmetro e ocupam um volume total de 1 618 cm³, então, considerando $\pi = 3$, **k** vale, aproximadamente:

$$k.\frac{4}{3}\pi(0{,}01)^3 = 1\,618 \Rightarrow k = 4\,045 \times 10^5$$

Questão 06 – Letra E

Comentário: A seção **S** é representada por um círculo cuja área é igual a 16π cm², logo, seu raio **r** é igual a $\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow 16 \Rightarrow r = 4$ cm.

A seção **S** está a 3 cm do centro da esfera, logo:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo em destaque na figura, podemos determinar o valor do raio **R** da esfera, assim:

$$R^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5 \text{ cm}$$

Portanto, o volume da esfera será igual a $\frac{4}{3}.\pi.5^3 = \frac{500\pi}{3}$ cm³.

Questão 07

Comentário:

A) O volume total do cilindro de altura 50 cm e raio 15 cm vale:

$V_T = \pi.15^2.50 = 35\ 325\ cm^3$, ou seja, $V_T = 35{,}325\ L$

Como o cilindro contém 1 L de água a menos, então o volume de água contido nele é 34,325 L.

B) Sabe-se que o cilindro contém 1 L de água a menos. Portanto, para transbordar 2 L de água desse, devemos introduzir uma esfera de raio **R**, cujo volume seja de 3 L, ou 3 dm^3. Assim, temos:

$$3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{9}{4\pi}}\ dm$$

Questão 09 – Letra A

Comentário: O ângulo do fuso esférico é $\alpha = 72°$. Em radianos, o ângulo $\alpha = \frac{72°}{360°}.2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5}$ rad. Assim, a área do fuso de raio R = 5 m é:

$$\begin{array}{l} 2\pi \text{ ------ } 4\pi R^2 \\ \frac{2}{5}\pi \text{ ------ } A \end{array} \Rightarrow A = \frac{2\pi}{5}.\frac{1}{2\pi}.4\pi R^2 \Rightarrow$$

$$A = \frac{4}{5}\pi(5)^2 \Rightarrow A = 20\pi\ m^2$$

Questão 11 – Letra D

Comentário: As esferas menores possuem raio igual a 10 cm, logo, o volume **v** de cada uma é igual a $v = \frac{4}{3}.\pi.10^3 = \frac{4\ 000\pi}{\pi}\ cm^3$.

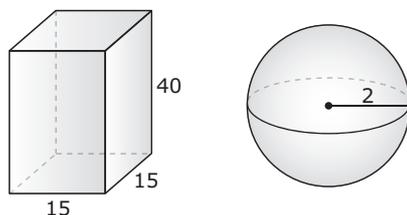
O artesão, ao desmanchar 8 esferas menores, obtém um volume de material igual a $8.\frac{4\ 000\pi}{3} = \frac{32\ 000\pi}{3} cm^3$.

Sendo **R** o raio da nova esfera construída com o desmanche das 8 esferas menores, temos:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{32\ 000\pi}{3} \quad R^3 = 8\ 000 \quad R = 20$$

Portanto, o raio da nova esfera é igual a 20 cm.

Questão 12

Comentário: Considere as figuras a seguir:

A) Sendo A_R e A_B as áreas, em cm^2, da lateral do recipiente e da superfície de cada bola, respectivamente, temos:

$A_R = 4.(15.40) = 2\ 400$

$A_B = 4.\pi.(2)^2 = 48$, pois foi dado que $\pi = 3$

B) Sendo V_R, V_B e V_L os volumes, em cm^3, do recipiente, de cada bola e do líquido, respectivamente, temos:

$V_R = 15.15.40 = 9\ 000$

$V_B = \frac{4}{3}.\pi(2)^3 = 32$

$V_L = V_R - 90.V_B = 9\ 000 - 90.32 = 6\ 120$

Questão 13 – Letra B

Comentário: Para determinar a quantidade de latas de tinta a serem utilizadas, devemos calcular a área da cobertura da construção, que possui o formato de uma semiesfera de 28 m de diâmetro, e subtrair a área de 12 partes que correspondem, cada uma, a um semicírculo de raio igual a 3 m, logo:

$$A_{cobertura} = A_{semiesfera} - 12.A_{semicírculo} \quad A_{cobertura} = \frac{4\pi.14^2}{2} - 12.\frac{\pi.3^2}{2}$$

$$A_{cobertura} = 392\pi - 54\pi = 338\pi \underset{\pi = 3}{\smile} \quad A_{cobertura} = 338.3 = 1\ 014\ m^2$$

Sabemos que cada lata de tinta é para pintar 39 m², logo:

$$\begin{array}{lll} \text{Latas} & & \text{Área} \\ 1 & — & 39\ m^2 \\ x & — & 1014\ m^2 \end{array} \Rightarrow 39x = 1\ 014 \Rightarrow x = 26$$

Portanto, a quantidade mínima de latas de tintas para pintar toda a cobertura deve ser igual a 26.

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: O volume de um cilindro de 24 cm de diâmetro e altura 15 cm é:

$V = \pi(12)^2.15 \Rightarrow V = 2\ 160\pi$

Como o volume desse cilindro será transformado em uma esfera de raio **R**, temos que:

$$V_{ci} = V_e \Rightarrow 2\ 160\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 = 1\ 620 \Rightarrow R = 3\sqrt[3]{60}$$

Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Sejam V_{DS} o volume de água doce superficial e V_{DP} o volume de água doce do planeta. Logo:

$$V_{DS} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad V_{DS} = \frac{4}{3}\pi.58^3 \quad \text{e}$$

$$V_{DP} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad V_{DP} = \frac{4}{3}\pi.406^3$$

Portanto, a razão:

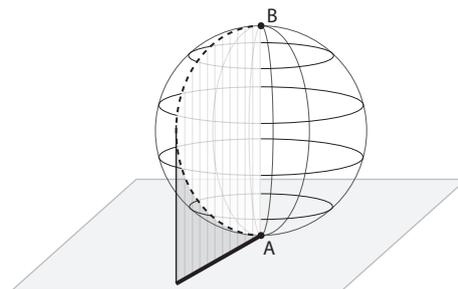
$$\frac{V_{DS}}{V_{DP}} = \frac{\frac{4}{3}\pi.58^3}{\frac{4}{3}\pi.406^3} = \left(\frac{58}{406}\right)^3 \quad \frac{V_{DS}}{V_{DP}} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \quad \frac{V_{DS}}{V_{DP}} = \frac{1}{343}$$

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

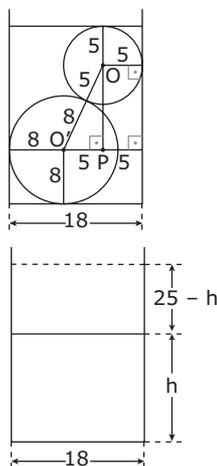
Comentário: Observe na figura a seguir a projeção ortogonal do caminho percorrido pelo pelo motoqueiro no plano da base.

Portanto, um segmento de reta.

MÓDULO – B 12

Inscrição de sólidos

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: Vamos determinar a altura do recipiente cilíndrico de diâmetro 18 cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OO'P, temos:

$(13)^2 = (5)^2 + (OP)^2 \Rightarrow OP = 12$ cm, pois $OP > 0$

Logo, a altura do cilindro é $h = 8 + 12 + 5 \Rightarrow h = 25$ cm.

Assim, o volume do cilindro é:

$V = \pi(9)^2.25 \Rightarrow V = 2\,025\pi$ cm^3

Já o volume das esferas de raios 8 cm e 5 cm é:

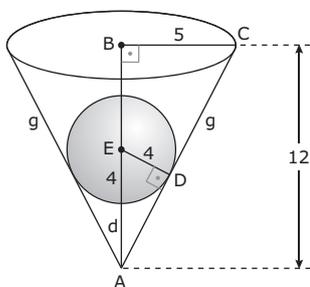
$V_e = \frac{4}{3}\pi(8)^3 + \frac{4}{3}\pi(5)^3 \Rightarrow V_e = \frac{2\,548\pi}{3}$ cm^3

Retirando as duas esferas do recipiente, a altura **h**, em cm, da água vale:

$V_e = \pi(9)^2.(25 - h) \Rightarrow \frac{2\,548\pi}{3} = \pi.81.(25 - h) \Rightarrow h = 14,5$ cm

Portanto, a altura da água, após serem retiradas as duas esferas, é de 14,5 cm.

Questão 02

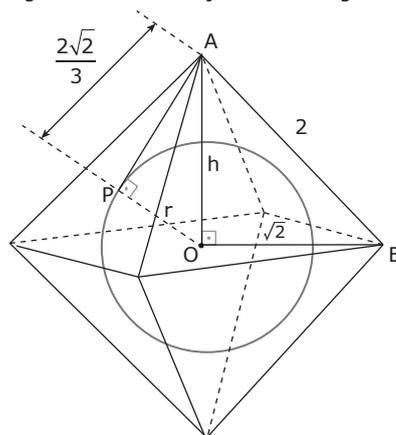
Comentário: A figura de uma esfera de 4 cm de raio inscrita em um cone de 12 cm de altura e 5 cm de raio é:

A geratriz do cone é

$g^2 = (12)^2 + (5)^2 \Rightarrow g = 13$ cm, pois $g > 0$.

Como os triângulos ADE e ABC são semelhantes, então a distância **d** do vértice do cone à esfera é:

$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \frac{d + 4}{13} = \frac{4}{5} \Rightarrow d = 6,4$ cm

Questão 03 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir que representa o octaedro regular de aresta cuja medida é igual a 2 cm:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no Δ AOB podemos determinar a medida **h** que corresponde a altura de uma pirâmide de base quadrada de lado 2, assim:

$2^2 = h^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad h^2 = 2^2 - 2 \quad h = \sqrt{2}$

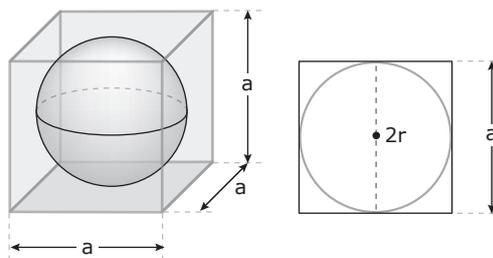
Como a esfera está inscrita no octaedro, temos que os pontos de tangência são os baricentros de cada face, logo, aplicando o Teorema de Pitágoras no Δ APO, temos:

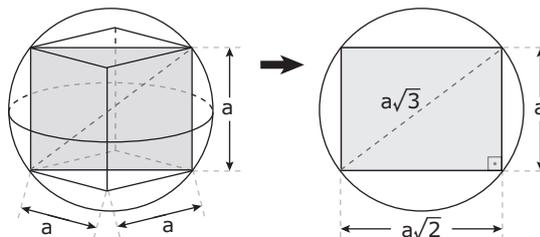
$\left(\sqrt{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad r^2 = 2 - \frac{4}{3} \quad r^2 = \frac{2}{3} \quad r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad r = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Sendo **r** o raio da pérola, temos que seu volume é igual a:

$V = \frac{4\pi}{3}.\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 \quad V = \frac{4\pi}{3}.\frac{6\sqrt{6}}{27} \quad V = \frac{8\pi\sqrt{6}}{27}$ cm^3.

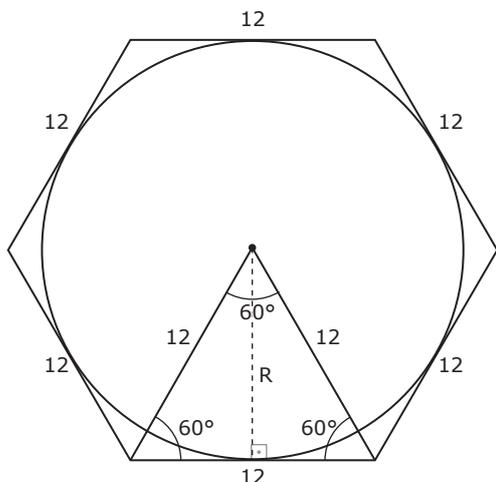
Questão 04 – Letra D

Comentário: A razão harmônica de um poliedro é a razão entre o raio da esfera circunscrita e inscrita, respectivamente. A figura a seguir representa uma esfera inscrita em um cubo de aresta **a**:

Logo, a esfera possui raio igual a $2r = a \quad r = \frac{a}{2}$.

Para uma esfera circunscrita, temos a seguinte figura:

Logo, a esfera possui raio igual a $2R = a\sqrt{3} \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Fazendo a razão harmônica, temos: $\frac{R}{r} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{a} = \sqrt{3}$.

Questão 05 – Letra E

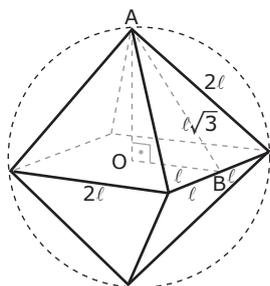
Comentário: Sabemos que a pizza é um cilindro de altura igual a 4 cm e está inscrita no prisma hexagonal regular, cuja base possui um perímetro igual a 72 cm, logo, para determinarmos o volume de pizza, precisamos determinar a medida do raio de sua base. Observe a figura a seguir:

Baseado na figura, temos que o raio da base da pizza é igual à altura do triângulo equilátero de lado igual a 12 cm em destaque, logo, $R = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

Portanto, o volume máximo de pizza será igual ao volume do cilindro de altura igual a 4 cm e raio da base igual a $6\sqrt{3}$ cm, assim:

$$V = \pi.R^2.h \qquad V = \pi.(6\sqrt{3})^2.4 = 432\pi \text{ cm}^3$$

Exercícios Propostos

Questão 04 – Letra D

Comentário: Por hipótese, uma esfera foi lapidada na forma de um octaedro regular de $9\sqrt{2}$ cm³ de volume.
Considere a seguinte figura:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABO, temos:

$$AB^2 = BO^2 + OA^2 \Rightarrow \left(\ell\sqrt{3}\right)^2 = \ell^2 + OA^2 \Rightarrow$$

$$OA^2 = 2\ell^2 \Rightarrow OA = \ell\sqrt{2}, \text{ pois } \ell > 0$$

Como foi dado o volume do octaedro regular, então:

$$9\sqrt{2} = 2.\frac{1}{3}.(2\ell)^2\ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow \ell = \frac{3}{2}$$

Como o raio **r** da esfera é OA, então:

$$r = OA = \ell\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, o volume retirado, em cm³, é a diferença entre o volume da esfera e o volume do octaedro, ou seja:

$$V = V_e - V_o \Rightarrow V = \frac{4}{3}.3.\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 9\sqrt{2} \Rightarrow V = 18\sqrt{2}$$

Questão 08 – Letra C

Comentário: Sabemos que as áreas dos sólidos em questão são dadas por:

$A_{esfera} = 4\pi R^2_{esfera}$
$A_{cilindro} = 6\pi R^2_{cilindro}$
$A_{cone} = 3\pi R^2_{cone}$

Vamos estabelecer a relação entre os raios dos sólidos. Considere as figuras seguintes:

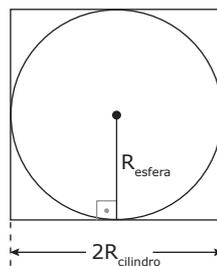
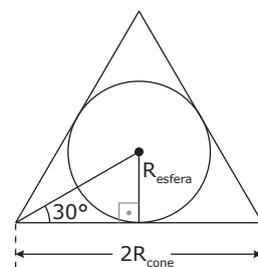



Figura 1 Figura 2

Pela figura 1, temos:

$R^2_{cilindro} = R^2_{esfera}$

Na figura 2, por trigonometria, temos:

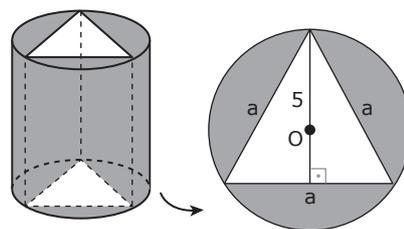
$$\text{tg } 30° = \frac{R_{esfera}}{R_{cone}} \Rightarrow R^2_{cone} = 3R^2_{esfera}$$

Logo, as áreas são:

$A_{esfera} = 4\pi R^2_{esfera}$
$A_{cilindro} = 6\pi R^2_{esfera}$
$A_{cone} = 9\pi R^2_{esfera}$

Portanto, essas áreas são proporcionais aos números 4, 6 e 9.

Questão 12

Comentário: O volume da região entre o prisma e o cilindro será determinado pela diferença entre o volume do cilindro e o volume da prisma, mas é necessário determinarmos a medida da aresta da base do prisma. Observe a figura a seguir:

O ponto **O** é o centro do círculo e o baricentro do triângulo, logo, temos que o raio é igual a $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo, assim:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = 5 \qquad a = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

Portanto, o volume **V** da região será:

$$V = V_{cilindro} - V_{prisma} \qquad V = \pi.5^2.12 - \frac{\left(5\sqrt{3}\right)^2.\sqrt{3}}{4}.12$$

$$V = 300\pi - 225\sqrt{3} \qquad V = 300.3 - 225.1,7$$

$$V = 900 - 382,5 = 517,5 \text{ cm}^3$$

Questão 13 – Letra C

Comentário: Sejam V_1 e V_2 os volumes dos cones, de área da base **A** e alturas h_1 e h_2, respectivamente, e tais que $V_1 = 2V_2$. Assim:

$V_1 = 2V_2 \Rightarrow Ah_1 = 2Ah_2 \Rightarrow h_1 = 2h_2$

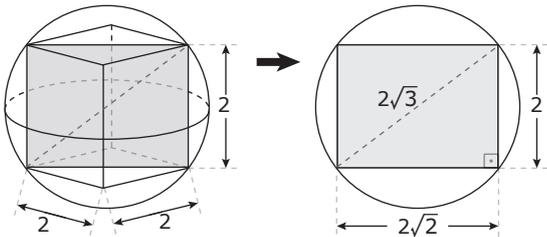
Note que a soma das alturas é o diâmetro da esfera.

$$h_1 + h_2 = 2R \Rightarrow 3h_2 = 2R \Rightarrow h_2 = \frac{2R}{3}$$

Logo, a distância do plano α ao centro da esfera é:

$$d = R - h_1 = R - \frac{2R}{3} \qquad d = \frac{R}{3}$$

Questão 14 – Letra A

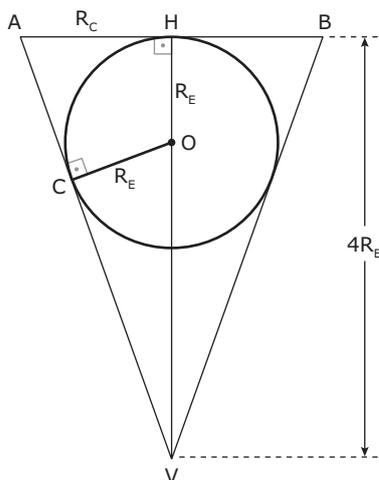
Comentário: Observe a figura a seguir:

Temos que o raio **R** da esfera circunscrita ao cubo é igual à metade da diagonal do cubo, logo, $R = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ m.

O volume **V** da região externa ao cubo e interna à esfera será dada por:

$$V = V_{Esfera} - V_{Cubo} \qquad V = \frac{4\pi.\left(\sqrt{3}\right)^3}{3} - 2^3$$

$$V = 4\pi\sqrt{3} - 8 = 4(\pi\sqrt{3} - 2)\ m^3$$

Questão 15 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir, que representa a seção transversal do cone.

Note que os triângulos AHV e OCV são semelhantes.

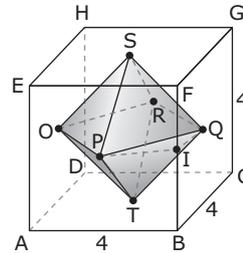
Então:

$$\frac{AH}{OC} = \frac{HV}{CV} \qquad \frac{AH}{HV} = \frac{OC}{\sqrt{OV^2 - OC^2}} \qquad \frac{R_C}{4R_E} = \frac{R_E}{\sqrt{9R_E^2 - R_E^2}} \qquad \frac{R_C}{R_E} = \sqrt{2}$$

Logo, a razão entre o volume do cone e o da esfera é:

$$\frac{V_{cone}}{V_{esfera}} = \frac{\dfrac{\pi R_C^2.4R_E}{3}}{\dfrac{4}{3}\pi R_E^3} = \left(\frac{R_C}{R_E}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Questão 16 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir:

Trace o segmento PI ⊥ BF, em que **I** ∈ BF. Agora, trace o segmento QI ⊥ BF.

Como o ponto **P** está na face central de uma das arestas do cubo, então PI = 2 cm. Analogamente, QI = 2 cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo PIQ, temos que:

$PQ^2 = PI^2 + QI^2 \Rightarrow PQ^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow PQ = 2\sqrt{2}$ cm

Portanto, determinamos uma das arestas do sólido OPQRST.

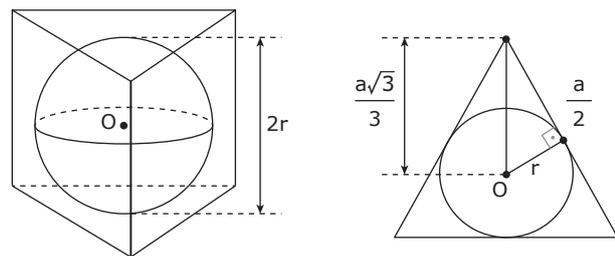
Seguindo o mesmo raciocínio, conseguimos determinar todas as arestas do sólido OPQRST, que medem também $2\sqrt{2}$ cm.

Logo, as faces do sólido OPQRST são 8 triângulos equiláteros.

Assim, sua área lateral, em cm², é:

$$A_\ell = 8.\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_\ell = 16\sqrt{3}$$

Questão 17 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da secção reta do prisma, temos que:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 \qquad \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = r^2$$

$$\frac{a^2}{12} = r^2 \qquad a^2 = 12r^2 \qquad a = 2r\sqrt{3}$$

Calculando o volume do prisma, temos:

$$V = \frac{\left(2r\sqrt{3}\right)^2.\sqrt{3}}{4}.2r = \frac{12r^2.\sqrt{3}}{4}.2r = 6r^3\sqrt{3}$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Note que o número máximo de esferas é igual ao número de cubos de lado 12 cm que cabem na caixa. Sendo **n** esse número, temos:

$12^3.n = 13\ 824 \Rightarrow n = 8$

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Seja **n** a quantidade máxima de pacotes de livros que podem ser colocados em cada caixa. Logo:

$(20.20.30).n = 40.40.60 \Rightarrow n = 8$

Assim, como são 100 pacotes a serem transportados e cada caixa comporta 8 pacotes, temos $\frac{100}{8} = 12,5$ caixas.

Concluindo, são necessárias, no mínimo, 13 caixas.

Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Note que, apesar de o caminhão possuir dimensões 5,1 m, 2,1 m e 2,1 m, as caixas são cúbicas. Logo, como cada caixa deve ser transportada inteira, devemos desconsiderar os 10 centímetros e considerar que suas dimensões são 5 m, 2 m e 2 m.

Portanto, cada caminhão consegue transportar 5 m.2 m.2 m = 20 m³, ou seja, 20 caixas de 1 m³ de cada vez. Como são 240 caixas, serão necessárias 12 viagens.

MÓDULO – C 11

Logaritmos

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: Substituindo os valores do enunciado na fórmula e considerando **t**, em semanas, temos:

$$28 = (100 - 20).\ \frac{1}{2}^{t} + 20 \Rightarrow 80.(2^{-1})^t = 8 \Rightarrow 2^{-t} = \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\log_2 2^{-t} = \log_2 \frac{1}{10} \Rightarrow -t.\log_2 2 = \log_2 10^{-1} \Rightarrow t = \log_2 10$$

Mas:

$$\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16 \Rightarrow \log_2 2^3 < \log_2 10 < \log_2 2^4 \Rightarrow$$

$$3 < \log_2 10 < 4$$

Logo, o tempo necessário para que o percentual se reduza a 28% será entre três e quatro semanas.

Questão 02 – Letra D

Comentário: Fazendo x = 12,5, temos:

$$\log\ \frac{L}{15} = -0,08.12,5 \qquad \log\ \frac{L}{15} = -1$$

$$\frac{L}{15} = 10^{-1} \qquad 1,5 \text{ lumens}$$

Questão 03 – Letra A

Comentário: Seja P(T) a produção, **T** anos após 1987, e P_0 a produção inicial (em 1987). Temos que:

$P(T) = P_0.1,08^T$

Quadruplicando a produção de 1987: $P(T) = 4.P_0$

$4P_0 = P_0.1,08^T \Rightarrow 4 = 1,08^T \Rightarrow \log 4 = \log (1,08)^T \Rightarrow$

$\log 2^2 = T.\log \frac{108}{100} \Rightarrow 2.\log 2 = T.[\log (2^2.3^3) - \log 100] \Rightarrow$

$2.\log 2 = T.[2.\log 2 + 3.\log 3 - \log 10^2] \Rightarrow$

$2.0,30 = T.[2.0,30 + 3.0,48 - 2] \Rightarrow$

$0,60 = T.0,04 \Rightarrow T = 15$ anos (após 1987)

Logo, temos que 1987 + 15 = 2002.

Questão 04 – Letra D

Comentário: $\log_A B = 2$ e $\log_C A = \frac{3}{5}$

Sabe-se que $\log_A C = \frac{1}{\log_C A} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

Temos que $\log_B C = \frac{\log_A C}{\log_A B} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6}$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Sabendo que $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$ para **a**, **b** e **c** reais positivos e $c \neq 1$, temos

$\log_x (x + 3) + \log_x (x - 2) = 2 \Rightarrow$

$\log_x [(x + 3)(x - 2)] = 2 \Rightarrow$

$x^2 + x - 6 = x^2 \Rightarrow x = 6$

Portanto, x = 6 é a única solução real da equação.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário:

$$\log_4 x + \log_2 y = 5 \quad \text{(I)}$$
$$\log_2 x - \log_4 y = 0 \quad \text{(II)}$$

Da equação I, temos:

$\log_4 x + \log_2 y = 5 \Rightarrow \log_{2.2} x + \log_2 y = 5 \Rightarrow$

$\frac{1}{2}.\log_2 x + \log_2 y = 5 \Rightarrow \log_2 x^{\frac{1}{2}} + \log_2 y = 5 \Rightarrow$

$\log_2 \left(x^{\frac{1}{2}}.y\right) = 5 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}}.y = 32$ (III)

Da equação II, temos:

$\log_2 x = \log_4 y \Rightarrow \log_2 x = \log_{2.2} y \Rightarrow$

$\log_2 x = \frac{1}{2}.\log_2 y \Rightarrow \log_2 x = \log_2 y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$x = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = x^2$ (IV)

Substituindo (IV) em (III), temos:

$x^{\frac{1}{2}}.x^2 = 32 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 2^5 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow x = 4$

Logo, y = 16.

$$\log_x \frac{x}{y} = \log_4 \frac{4}{16} = \log_4 \frac{1}{4} = \log_4 (4)^{-1} = -1$$

Observação: Modo Alternativo:

Sabemos que $y = x^2$. Logo, temos:

$$\log_x \frac{x}{y} = \log_x \frac{x}{x^2} = \log_x \frac{1}{x} = \log_x (x)^{-1} = -1$$

Questão 03 – Letra C

Comentário:

$$T(t) = 3^t + \frac{36}{3^t} \Rightarrow 12 = 3^t + \frac{36}{3^t}$$

Fazendo $3^t = L$, temos:

$$L + \frac{36}{L} = 12 \Rightarrow L^2 - 12L + 36 = 0 \Rightarrow$$

$(L - 6)^2 = 0 \Rightarrow L - 6 = 0 \Rightarrow L = 6$. Logo:

$3^t = 6 \Rightarrow \log_3 3^t = \log_3 6 \Rightarrow t = \log_3 3.2 \Rightarrow$

$t = \log_3 3 + \log_3 2 = 1 + 0,6 = 1,6$ h = 1h e 36 minutos.

Questão 04 – Letra C

Comentário:

$\log_5 (a - b) = x$
$a + b = 25$

Queremos determinar $\log_5 (a^2 - b^2)$

$(a - b) = 5^x \Rightarrow (a - b)(a + b) = 5^x.25 = 5^x.5^2 = 5^{x+2} \Rightarrow$

$a^2 - b^2 = 5^{x+2} \Rightarrow \log_5 (a^2 - b^2) = \log_5 5^{x+2} = x + 2$

Questão 07 – Letra C

Comentário: De acordo com os dados do problema, temos:

$$T_{(t)} = (T_0 - T_{AR}) \times 10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR}$$

$$140 = (740 - 40) \times 10^{-\frac{t}{12}} + 40$$

$$100 = 700 \times 10^{-\frac{t}{12}}$$

$$10^{-\frac{t}{12}} = \frac{1}{7}$$

$$\log 10^{-\frac{t}{12}} = \log 7^{-1}$$

$$-\frac{t}{12} = -\log (7) \qquad t = 12 \log (7) \text{ minutos}$$

Questão 09 – Letra D

Comentário:

$$5^{(-\log_5 3).(\log_3 7)} = 5^{(\log_5 3^{-1}).(\log_3 7)} = \left(5^{(\log_5 3^{-1})}\right)^{\log_3 7} =$$

$$\left(3^{-1}\right)^{\log_3 7} = 3^{-\log_3 7} = 3^{\log_3 7^{-1}} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

Questão 10 – Letra E

Comentário: Sabendo que $\log_a b^c = c.\log_a b$, $\log_a a = 1$ e $\log_a b > \log_a c \Rightarrow b > c$, com **a**, **b** e **c** reais positivos e $a \neq 1$, temos

$n = f(10) + f(11) + f(12)$

$n = \log_{1\,319} 10^2 + \log_{1\,319} 11^2 + \log_{1\,319} 12^2$

$n = \log_{1\,319} (10.11.12)^2$

$n = 2.\log_{1\,319} (1\,320)$

Portanto,

$n = 2.\log_{1\,319} (1\,320) > \underbrace{2.\log_{1\,319} (1\,319)}_{2}$

Questão 11 – Letra D

Comentário:

$N = 120 + 10.\log_{10} (I)$

$N_1 = 120 + 10.\log_{10} (I_1)$
$N_2 = 120 + 10.\log_{10} (I_2)$

$N_1 - N_2 = 10.\log_{10} (I_1) - 10.\log_{10} (I_2) \Rightarrow$

$20 = 10.[\log_{10} (I_1) - \log_{10} (I_2)] \Rightarrow$

$$2 = \log_{10} \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^2$$

Questão 13 – Letra B

Comentário:

$f(x) = a^x$

$f(2) = a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

Temos:

$$\log_4 \frac{1}{16}.\log_4 16 = \log_4 (4)^{-2}.\log_4 (4)^2 = -2.2 = -4$$

Questão 14 – Letra C

Comentário:

$$\log_{10} \frac{1}{2} + \log_{10} \frac{2}{3} + \log_{10} \frac{3}{4} + ... + \log_{10} \frac{99}{100} =$$

$$\log_{10} \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}. ... .\frac{98}{99}.\frac{99}{100} = \log_{10} \frac{1}{100} = \log_{10} [10^{-2}] = -2$$

Questão 16 – Letra E

Comentário: A produção P(T) em função do tempo **T**, em anos, é dada por:

$P(T) = 6\,000.1,2^T$

Fazendo P(T) = 3.(6 000) = 18 000, temos:

$18\,000 = 6\,000.1,2^T \Rightarrow 3 = 1,2^T$

$$\log 3 = \log 1,2^T \Rightarrow \log 3 = T.\log \frac{12}{10} \Rightarrow$$

$$\log 3 = T.\log \frac{2^2.3}{10} \Rightarrow \log 3 = T.[\log 2^2 + \log 3 - \log 10] \Rightarrow$$

$\log 3 = T.[2.\log 2 + \log 3 - \log 10] \Rightarrow$

$0,48 = T.[2.0,30 + 0,48 - 1] \Rightarrow$

$0,48 = T.0,08 \Rightarrow T = 6$ anos

Logo, temos que 1996 + 6 = 2002.

Questão 18 – Letra C

Comentário:

$(\log_3 x)^2 - m.\log_3 x = 0 \Rightarrow \log_3 x.[\log_3 x - m] = 0 \Rightarrow$

$\log_3 x = 0$ ou $\log_3 x - m = 0$; $x = 3^0$ ou $\log_3 x = m$; $x = 1$ ou $x = 3^m$

Como o produto das raízes é 9, então:

$1.3^m = 9 \Rightarrow 3^m = 3^2 \Rightarrow m = 2$

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário:

$12^{30} = x \Rightarrow \log_{10} 12^{30} = \log_{10} x \Rightarrow$

$30.\log_{10} (2^2.3) = \log_{10} x \Rightarrow$

$30.(2.\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = \log_{10} x \Rightarrow$

$30.(2.0,30 + 0,48) = \log_{10} x \Rightarrow$

$30.1,08 = \log_{10} x \Rightarrow x = 10^{32,4}$

Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Seja **t** o número de anos necessários, a partir de 1960, para que a população se torne igual a 350 milhões.

Temos:

$350 = 70.(1 + 0,03)^t \Rightarrow 5 = 1,03^t \Rightarrow$

$\log \dfrac{10}{2} = \log (1,03)^t \Rightarrow \log 10 - \log 2 = \log (1,03)^t \Rightarrow$

$1 - 0,301 = t.0,013 \Rightarrow t = \dfrac{0,699}{0,013} \cong 54$ anos

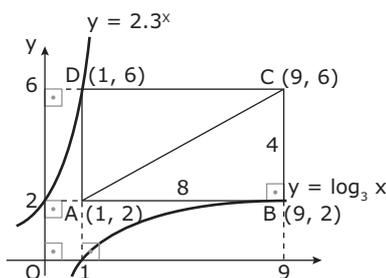
Portanto, a população seria igual a 350 milhões em 1 960 + 54 = 2 014.

MÓDULO – C 12

Função logarítmica

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: Considere o gráfico a seguir:

Observe que a abscissa de **A** é igual à abscissa de **D**, ou seja, ambas são iguais a 1. Logo, o ponto **D** possui ordenada igual a $y = 2.3^1 = 6$. Além disso, quando $x = 0$, a função $y = 2.3^x$ torna-se igual a $y = 2.3^0 = 2.1 = 2$. Desse modo, a ordenada do ponto **A** é igual à ordenada do ponto **B**, ou seja, ambas são iguais a 2. Substituindo $y = 2$ na função $y = \log_3 x$, obtemos $2 = \log_3 x \Rightarrow x = 9$, que é igual às abscissas de **B** e **C**. Temos, portanto:

$(AC)^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$, pois $AC > 0$

Questão 02 – Letra D

Comentário: A raiz da função $y = \log (x + 1)$ é tal que

$\log (x + 1) = 0 \Rightarrow x + 1 = 10^0 \Rightarrow x = 0$

Daí, o gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto (0, 0). Portanto, a alternativa correta é a D, cujo gráfico passa pela origem.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Como $x^2 - x + 1 > 0$ para todo **x** real, temos que os valores de **x** para os quais **f** está definida são tais que

$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1) > 0 \Rightarrow$

$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - x + 1) > \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow$

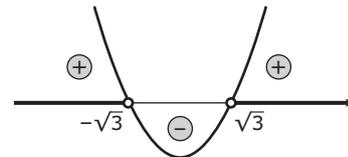
$x^2 - x + 1 < 1 \Rightarrow$

$x.(x - 1) < 0 \Rightarrow$

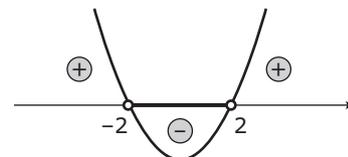
$0 < x < 1$

Questão 04 – Letra D

Comentário: $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 3) > 0$

i) Condição de existência: $x^2 - 3 > 0$

Ou seja, $x < -\sqrt{3}$ ou $x > \sqrt{3}$.

ii) Temos que: $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 3) > 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 3) > \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow$

$x^2 - 3 < 1 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$

Ou seja, $-2 < x < 2$.

Efetuando a interseção dos intervalos obtidos, temos, como solução, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3} < x < 2\}$.

Questão 05 – Letra D

Comentário: $\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$

Condições de existência:

i) $2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{5}{2}$ (I)

ii) $3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{3}$ (II)

A interseção dos intervalos (I) e (II) nos dá a condição $x > \dfrac{1}{3}$ (III).

Temos que:

$\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1 \Rightarrow$

$\log_2 \dfrac{2x+5}{3x-1} > \log_2 2 \Rightarrow \dfrac{2x+5}{3x-1} > 2$

Como $3x - 1 > 0$, temos:

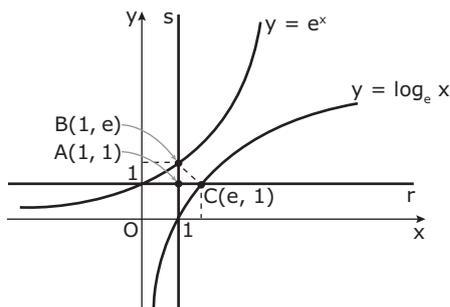
$2x + 5 > 6x - 2 \Rightarrow -4x > -7 \Rightarrow 4x < 7 \Rightarrow x < \frac{7}{4}$ (IV)

A interseção dos intervalos (III) e (IV) é dado pelo intervalo

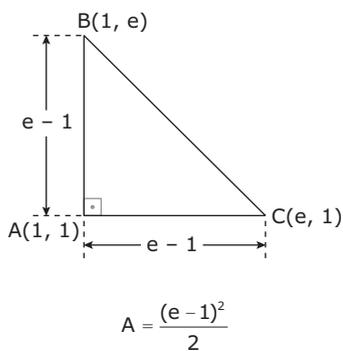
$\frac{1}{3}, \frac{7}{4}$.

Exercícios Propostos

Questão 02 – Letra D

Comentário: Considere o gráfico a seguir:

As coordenadas do ponto **A** são (1, 1), conforme a figura anterior. Para determinar as coordenadas de **B**, devemos substituir $x = 1$ na função $y = e^x$. Logo, as coordenadas de **B** são (1, e). Analogamente, devemos substituir $y = 1$ na função $y = \log_e x$ para determinarmos as coordenadas de **C**. Temos, portanto, C(e, 1).

Área do triângulo ABC:

$$A = \frac{(e-1)^2}{2}$$

Questão 04 – Letra A

Comentário:

$f(x) = \log_4 x$

$f(a) = 1 + f(b) \Rightarrow \log_4 a = 1 + \log_4 b \Rightarrow \log_4 a - \log_4 b = 1 \Rightarrow$

$\log_4 \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 4 \Rightarrow a = 4b$

$a - b = 3.f(2) \Rightarrow a - b = 3.\log_4 2 \Rightarrow a - b = 3.\log_{2.2} 2 \Rightarrow$

$a - b = 3.\frac{1}{2}.\log_2 2 \Rightarrow a - b = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$4b - b = \frac{3}{2} \Rightarrow 3b = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

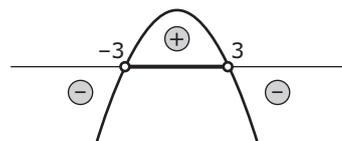
Logo, $a = 4.\frac{1}{2} = 2$.

Portanto, $a + b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Questão 05 – Letra A

Comentário: $f(x) = \log (9 - x^2) + \log (2 - x)$

Temos que:

(I) $9 - x^2 > 0$

Portanto, $-3 < x < 3$.

(II) $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$

Fazendo a interseção, temos:

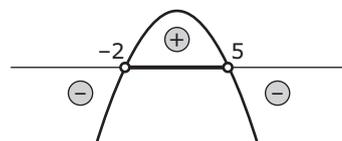
$-3 < x < 2$

Números inteiros: –2, –1, 0, 1 (4 números)

Questão 07 – Letra E

Comentário: $f(x) = \log_5 (-x^2 + 3x + 10)$

Domínio: $-x^2 + 3x + 10 > 0$

Raízes: $x = -2$ ou $x = 5$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$

Questão 08 – Letra B

Comentário: $f(x) = 2.\log x$ e $g(x) = \log 2x$

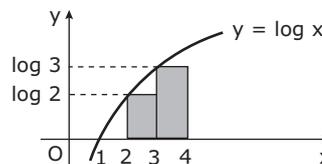
Fazendo $f(x) = g(x)$, temos:

$2.\log x = \log (2x) \Rightarrow \log x^2 = \log (2x) \Rightarrow$

$x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$x = 0$ (não convém)
ou
$x = 2$ (convém)

Questão 10 – Letra E

Comentário: Considere o gráfico a seguir:

A área sombreada é $1.\log 2 + 1.\log 3 = \log (2.3) = \log 6$.

Questão 13 – Letra A

Comentário: A função **f** está definida para os valores reais de **x** tais que

$x^2 - 2x - 15 > 0$

$(x - 1)^2 > 16$

$|x - 1| > 4$

$x < -3$ ou $x > 5$

Portanto, como –4 é o maior número inteiro negativo e 6 é o menor número inteiro positivo que pertencem ao domínio de **f**, tem-se que o produto pedido é igual a $-4.6 = -24$.

Questão 16 – Letra B

Comentário:

I. Falsa. Se $f(x) = 0$, temos

$$\log(x^2 - x) = 0 \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad x > 1$$

II. Verdadeira. Como $2\log 2 + \log 3 = \log(2^2.3) = \log 12$, vem $x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$

III. Verdadeira. Temos que

$$\frac{2}{\log_3 10} + \frac{3}{\log_2 10} = 2.\log 3 + 3\log 2 = \log 3^2 + \log 2^3 = \log 72$$

Portanto, $x^2 - x = 72 \Rightarrow x^2 - x - 72 = 0 \Rightarrow x = 9$.

Questão 17

Comentário: A temperatura C(t), em graus Celsius, em função do tempo **t**, em minutos, é dada por $C(t) = 30 + 20.e^{-0,2t}$. Considerando $C(t) = 35$, temos:

$35 = 30 + 20.e^{-0,2t} \Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{5}{20} \Rightarrow \ln e^{-0,2t} = \ln \frac{1}{4} \Rightarrow$

$-0,2t.\ln e = \ln (2^2)^{-1} \Rightarrow -0,2t.\ln e = -2.\ln 2 \Rightarrow$

$0,2.t = 2.0,7 \Rightarrow t = 7$

Logo, a peça atingirá a temperatura de 35 °C em 7 minutos.

Questão 18 – Letra E

Comentário: Seja D_f o domínio de f(x). D_f é tal que:

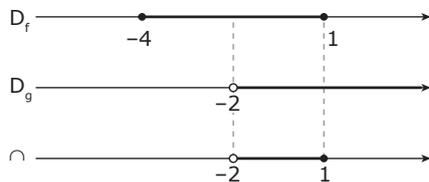
$-2x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Rightarrow$

$x^2 + 3x - 4 \leq 0 \Rightarrow$

$(x - 1)(x + 4) \leq 0$

Seja D_g o domínio de g(x). D_g é tal que:

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

Logo:

Questão 20 – Letra D

Comentário: Pode-se escrever a massa **M**, em gramas, em função da meia-vida **x**, de acordo com a seguinte equação.

$$M(x) = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow 10^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \log 10^{-6} = \log\left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow$$

$\log 10^{-6} = \log (2^{-1})^x \Rightarrow \log 10^{-6} = -x\log 2 \Rightarrow$

$-6 = -x.(0,3) \Rightarrow x = 20$

Como foi dito no enunciado, o iodo-131 possui meia-vida de 8 dias, então:

tempo = x.8 = 160 dias

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 26

Comentário: Com os parâmetros fornecidos, temos:

$M = 3,30 + \log_{10}(2\,000.0,1) \Rightarrow M = 3,30 + \log_{10} 200 \Rightarrow$

$M = 3,30 + \log_{10}(2.100) \Rightarrow M = 3,30 + \log_{10} 2 + \log_{10} 100 \Rightarrow$

$M = 3,30 + 0,30 + 2 = 5,6$

Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Vamos determinar a altura do som produzido pelo carro:

$$A(10^{-4}) = 10.\log\left(\frac{10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 10.\log(10^8) = 80 \text{ dB}$$

Vamos, agora, determinar a altura do som produzido pelo avião:

$$A(10^2) = 10.\log\left(\frac{10^2}{10^{-12}}\right) = 10.\log(10^{14}) = 140 \text{ dB}$$

A razão pedida é dada por $\frac{140 \text{ dB}}{80 \text{ dB}} = 1,75$.

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Como $M_w = 7,3$, então de $M_w = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$ temos:

$$7,3 = -10,7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0) \quad 18 = \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

$$27 = \log_{10}(M_0) \quad M_0 = 10^{27}$$

MÓDULO – D 11

Progressão aritmética

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: A P.A. correspondente é igual a (1, 2, 3, 4, ..., 80):

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+80)80}{2} = 81.40 = 3\,240$$

Questão 02 – Letra C

Comentário: Seja (a, a + 5, a + 10, a + 15, ...) a Progressão Aritmética cujo primeiro termo **a** queremos calcular. Como $S_4 = 42$, temos que $4a + 30 = 42 \Rightarrow a = 3$.

Questão 03 – Letra B

Comentário:

P.A.$(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$

$a_1 = S_1 = 3.1^2 - 2.1 = 1$

$a_1 + a_2 = S_2 = 3.2^2 - 2.2 = 8 \Rightarrow 1 + a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 7$

Razão $r = 7 - 1 = 6$, portanto $a_1 = 1$ e a razão $r = 6$.

Questão 04 – Letra B

Comentário: (40, 46, 52, ..., 136)

$a_1 = 40$, $r = 6$, $a_n = 136$ e queremos determinar **n**.

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 136 = 40 + (n - 1)6 \Rightarrow$

$96 = (n - 1)6 \Rightarrow n - 1 = 16 \Rightarrow n = 17$

Excluindo-se o dia da inauguração, passaram-se 16 sábados.

Questão 05 – Letra D

Comentário: $(1, 2, 3, ..., a_n)$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 210 \Rightarrow n(1 + a_n) = 420 \text{ (I)}$$

Mas $a_n = 1 + (n - 1)1 = 1 + n - 1 = n \Rightarrow a_n = n$

Logo, de I temos:

$n(1 + n) = 420 \Rightarrow n^2 + n - 420 = 0 \Rightarrow$

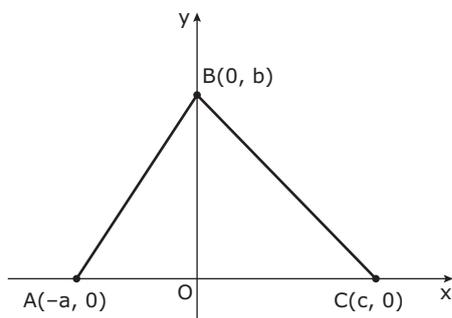
$n = -21$ (não convém)
ou
$n = 20$ (convém)

São feitas 20 filas.

Altura da placa = 20.0,33 + 0,10 + 0,10 = 6,8 m

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: $A(-a, 0)$ $B(0, b)$ $C(c, 0)$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.(c + a).b = b \Rightarrow c + a = 2; \text{ pois } b \neq 0$$

Como (a, b, c) está em P.A., temos

$$b = \frac{a + c}{2} \Rightarrow b = \frac{2}{2} \Rightarrow b = 1$$

Questão 03 – Letra D

Comentário:

Pessoas: (2, 6, 10, 14, ...) $\Rightarrow$ razão = 4

Doações: (0,80; 2,40; 4,00; ...) $\Rightarrow$ razão = 1,60

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 81\,920$$

$$n(a_1 + a_1 + (n - 1)r) = 163\,840 \Rightarrow$$

$$n(0{,}80 + 0{,}80 + (n - 1)1{,}60) = 163\,840$$

$$n(1{,}60 + 1{,}60n - 1{,}60) = 163\,840 \Rightarrow$$

$$1{,}60n^2 = 163\,840 \Rightarrow n^2 = 102\,400 \Rightarrow n = 320, \text{ pois } n > 0$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: Seja **r** a razão da progressão aritmética. Se o valor da 1ª prestação é R\$ 500,00 e o da 12ª é R\$ 2 150,00, então 2 150 = 500 + 11r $\Rightarrow r = \frac{1\,650}{11} = 150$.

Portanto, o valor da 10ª prestação é 500 + 9.150= R\$ 1 850,00.

Questão 06 – Letra C

Comentário:

$$\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, ..., 10$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 10 = \frac{1}{8} + (n - 1)\frac{1}{8} \Rightarrow 80 = 1 + n - 1$$

n = 80 números (79 intervalos)

Portanto, temos 79.3 = 237 segundos.

Questão 07 – Letra C

Comentário: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$

$a_2 + a_5 = 8 \Rightarrow a_1 + r + a_1 + 4r = 8 \Rightarrow$

$2a_1 + 5r = 8$

$a_8 = 7 \Rightarrow a_1 + 7r = 7$

$$\begin{cases} 2a_1 + 5r = 8 \\ a_1 + 7r = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 5r = 8 \\ -2a_1 - 14r = -14 \end{cases} \quad r = \frac{2}{3} \text{ e } a_1 = \frac{7}{3}$$

$$a_3 = a_1 + 2r = \frac{7}{3} + \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

$$a_7 = a_1 + 6r = \frac{7}{3} + \frac{12}{3} = \frac{19}{3}$$

$$a_3 + a_7 = \frac{11}{3} + \frac{19}{3} = 10$$

Questão 08 – Letra D

Comentário:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } \mathbf{x} \text{ é par} \\ 0, \text{ se } \mathbf{x} \text{ é impar} \end{cases}$$

Observe que f(1) = f(3) = f(5) = ... = f(999) = 0

Logo, a soma é dada por:

f(2) + f(4) + f(6) + ... + f(1 000)

↓ ↓ ↓ ↓

3 + 7 + 11 + ... + 1 999

Trata-se da soma dos termos da P.A. (3, 7, 11, ..., 1 999).

Observe que n = 500. Logo, temos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{500} = \frac{500(3 + 1\,999)}{2} = \frac{500.2\,002}{2} = 500\,500$$

Questão 14 – Letra B

Comentário: A soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética é igual a 500. Assim:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} \Rightarrow$$

$$500 = (a_1 + a_{10})5 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 100$$

A soma do terceiro e oitavo termos dessa P.A. é igual à soma do primeiro e do décimo, pois a soma de termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Logo: $a_3 + a_8 = a_1 + a_{10} = 100$, ou seja, $a_3 + a_8 = 100$

Questão 15 – Letra D

Comentário:

(a, b, 5a, d)

Sabe-se que:

$$b = \frac{a + 5a}{2} = 3a$$

Logo, a P.A. pode ser escrita como (a, 3a, 5a, d).

Como a razão da P.A. é igual a 2a, temos que d = 7a.

$$\text{Logo: } \frac{d}{b} = \frac{7a}{3a} = \frac{7}{3}$$

Questão 17

Comentário:

A) (87,9; 88,1; ...; 107,9)

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 107,9 = 87,9 + (n - 1)0,2 \Rightarrow$

$20 = (n - 1)0,2 \Rightarrow 100 = n - 1 \Rightarrow n = 101$

Podem funcionar 101 emissoras.

Números: (200, 201, 202, ..., 300)

O canal de maior frequência tem número 300.

B) O canal 285 ocupa a 86ª posição na P.A. das frequências. Assim, temos:

$a_{86} = 87,9 + (86 - 1)0,2 \Rightarrow a_{86} = 87,9 + 85.0,2 \Rightarrow$

$a_{86} = 87,9 + 17 \Rightarrow a_{86} = 104,9$

A frequência é igual a 104,9 MHz.

Questão 20 – Letra E

Comentário: As diferenças entre os números de ladrilhos escuros e de ladrilhos claros formam uma P.A de razão 1. Observe: (7, 8, 9, ..., 50).

Pelo termo geral temos: $50 = 7 + (n - 1).1 \Rightarrow n = 44$.

Logo, a 44ª figura terá 44 ladrilhos claros e 50 + 44 ladrilhos escuros, portanto, um total de 44 + 50 + 44 = 138 ladrilhos.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: Observe que os números pentagonais formam a sequência (1, 5, 12, ...).

Pelo padrão apresentado, a sequência formada pelos valores da diferença entre cada termo e o seu antecessor é igual a uma P.A. de razão 3. De fato, de 1 para 5 somamos 4, de 5 para 12 somamos 4 + 3 = 7, e de 12 para o próximo termo somamos 7 + 3 = 10.
Logo, o quarto termo da sequência é igual a 12 + 10 = 22.

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: O total de estrelas é dado pela soma dos 150 termos da P.A. (1, 2, 3, ..., 150).

Temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{150} = \frac{(1 + 150)150}{2} \Rightarrow$$

$S_{150} = 11\ 325$ estrelas

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Ronaldo percebeu que a soma dos elementos de uma determinada linha **n** é dada por n^2. Portanto, a soma dos elementos da 9ª linha é dada por $9^2 = 81$.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: O total depositado a cada cinco dias é dado por: 0,01 + 0,05 + 0,10 + 0,25 + 0,50 = 0,91.
Portanto, temos:

$$\begin{array}{l|l} 95,05 & 0,91 \\ \hline 0,41 & 104 \end{array}$$

Ou seja, são necessários 104 grupos de 5 dias, e ainda faltarão R$ 0,41 a serem depositados. Para depositar R$ 0,41, são necessários 4 dias, sendo:

- 1 dia para R$ 0,01;
- 1 dia para R$ 0,05;
- 1 dia para R$ 0,10;
- 1 dia para R$ 0,25.

Portanto, o total de dias é igual a 104. 5 + 4 = 524 dias. Além disso, a última moeda depositada foi de R$ 0,25.

Questão 05 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: A sequência (33 000; 34 500; 36 000; ...) é uma P.A. de razão r = 1 500 e $a_1 = 33\ 000$.

Assim, em julho, que será o sétimo termo, teremos:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_7 = a_1 + (7 - 1)r \Rightarrow$

$a_7 = 33\ 000 + 6.1\ 500 \Rightarrow a_7 = 42\ 000$

MÓDULO – D 12

Progressão geométrica

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: A sequência $(10^x, 10^{x+1}, 10^{x+2}, ...)$ pode ser escrita como $(10^x, 10^x.10, 10^x.10^2, ...)$. É fácil perceber que se trata de uma P.G. de razão 10.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Se (a, b, c) é uma progressão geométrica de razão 3, então (a, b, c) = (a, 3a, 9a).

Por outro lado, de acordo com o enunciado, temos que (a, 3a, 9a – 8) é uma progressão aritmética. Logo, sabendo que em uma P.A. o termo central é a média aritmética dos extremos, temos que $3a = \frac{a + 9a - 8}{2}$ $5a - 4 = 3a$ $a = 2$.

Portanto, a soma pedida é

a + 3a + 9a – 8 = 13a – 8 = 13.2 – 8 = 18

Questão 03 – Letra C

Comentário: $a_1 + a_2 + a_3 = 88$ (I)
$(a_1 - 2, a_2, a_3)$ é uma P.G. de razão 6.
$a_2 = (a_1 - 2)6 = 6a_1 - 12 \Rightarrow a_2 = 6a_1 - 12$
$a_3 = (a_1 - 2)36 = 36a_1 - 72 \Rightarrow a_3 = 36a_1 - 72$
Logo, de I temos:
$a_1 + 6a_1 - 12 + 36a_1 - 72 = 88 \Rightarrow a_1 = 4$
Então, temos que:
$a_2 = 12$ e $a_3 = 72$

Questão 04 – Letra C

Comentário: Os comprimentos das ramificações, em metros, constituem a progressão geométrica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots$ cujo primeiro termo é 1 e a razão vale $\frac{1}{2}$. Queremos calcular a soma dos dez primeiros termos dessa sequência, ou seja,

$$S_{10} = a_1.\frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 1.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = 2.\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$

$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 510 \Rightarrow a_1q + a_1q^3 + a_1q^5 + a_1q^7 = 510 \Rightarrow$

$a_1q(1 + q^2 + q^4 + q^6) = 510$ (I)

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 255 \Rightarrow a_1 + a_1q^2 + a_1q^4 + a_1q^6 = 255 \Rightarrow$

$a_1(1 + q^2 + q^4 + q^6) = 255$ (II)

Dividindo (I) por (II), obtemos:

$$\frac{a_1q(1 + q^2 + q^4 + q^6)}{a_1(1 + q^2 + q^4 + q^6)} = \frac{510}{255} \Rightarrow q = 2$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário:

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 12$$

A soma dos infinitos termos da P.G. $x, \frac{x}{3}, \frac{x}{9}, \ldots$ de razão $\frac{1}{3}$ é dada por:

$$S_\infty = \frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3x}{2}$$

Logo, temos: $\frac{3x}{2} = 12 \Rightarrow x = 8$

Questão 02 – Letra C

Comentário: P.G.: $(x, x + 9, x + 45)$

$(x, x + 9, x + 45) \Rightarrow (x + 9)^2 = x(x + 45) \Rightarrow$

$x^2 + 18x + 81 = x^2 + 45x \Rightarrow 27x = 81 \Rightarrow x = 3$

Logo, a P.G. é (3, 12, 48). Portanto, temos a razão $q = 4$.

Questão 04 – Letra E

Comentário: O preço do automóvel após uma dedução de 10% é obtido pela multiplicação do preço anterior por 0,9, ou seja, 90%. Portanto, trata-se de uma P.G. de razão $q = 0,9$.

$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow a_7 = 32\,000.0,9^{7-1} = 32\,000.0,9^6 = 17\,006$

Questão 05 – Letra E

Comentário:

P.A. = $(2, a_2, a_3, a_4, k, \ldots)$

P.G. = $(2, b_2, b_3, b_4, k, \ldots)$ e $q = 2$

$k = 2.2^4 = 2^5 = 32$

Logo, a P.A. é dada por: $(2, a_2, a_3, a_4, 32, \ldots)$

$32 = 2 + (5 - 1)r \Rightarrow 30 = 4r \Rightarrow r = \frac{15}{2}$

Questão 06 – Letra E

Comentário: Inicialmente, nossa P.A. é $(a_1, 2, a_3)$.

Temos:

$a_1 = 2 - r$ (I)

$a_3 = 2 + r$ (II)

Consideremos a P.G. $(a_1 + 3, a_2 - 3, a_3 - 3)$. Como $a_2 = 2$, temos $(a_1 + 3, -1, a_3 - 3)$. Substituindo I e II nessa P.G., temos:

$(5 - r, -1, r - 1) \Rightarrow (-1)^2 = (5 - r)(r - 1) \Rightarrow$

$r^2 - 6r + 6 = 0 \Rightarrow r = 3 + \sqrt{3}$ e $r = 3 - \sqrt{3}$

Para $r_1 = 3 + \sqrt{3}$, temos:

$a_1 = 2 - r = 2 - 3 - \sqrt{3} = -1 - \sqrt{3}$ (não convém)

Para $r_2 = 3 - \sqrt{3}$, temos:

$a_1 = 2 - r = 2 - 3 + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$ (convém)

Logo: $r = 3 - \sqrt{3}$

Questão 07 – Letra C

Comentário: Temos que o volume do cubo maior é 1 m^3. Assim, sua altura é 1 m.

O volume do cubo seguinte é $\frac{1}{27}$ m^3. Assim, sua altura é $\frac{1}{3}$ m.

O volume do próximo cubo é $\frac{1}{27}.\frac{1}{27} = \frac{1}{729}$ m^3. Assim, sua altura é $\frac{1}{9}$ m.

Logo, temos uma sequência de alturas que, nesta ordem, $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$, formam uma progressão geométrica em que o 1º termo $a_1 = 1$ e sua razão $q = \frac{1}{3}$.

Como queremos colocar uma infinidade de cubos nessa coluna, então a altura desta será a soma dos termos de uma P.G. infinita. Logo:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Portanto, a altura da coluna de cubos é 1,5 m.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Dado que os termos da sequência **A** satisfazem a regra $\frac{a_n}{a_{n-1}} = K$, temos que **A** é uma progressão geométrica.

Sabendo que o vídeo foi visto por aproximadamente 100 milhões de espectadores, temos que $S_6 = 10^8$. Logo, como $a_1 = 10^5$, temos:

$10^8 = \frac{10^5.(k^6 - 1)}{k - 1}$ $k^5 + k^4 + k^3 + k^2 + k + 1 = 1000$. Desse modo, se **k** $\in$]2, 3[, então $k^5 + k^4 + k^3 + k^2 + k + 1 > 1\,000$ para k = 3. Contudo, $3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 < 1\,000$ e, portanto, $k \notin$]2, 3[. Analogamente, se **k** $\in$]3, 4[, então

$k^5 + k^4 + k^3 + k^2 + k + 1 > 1\,000$ para $k = 4$.

De fato, $4^5 + 4^4 + 4^3 + 4^2 + 4 + 1 = 1\,365 > 1\,000$.

Por consequência, $k \in$]3, 4[.

Reescrevendo os termos de **A** em função de a_1 e **k**, obtemos $A = (a_1, a_1.k, a_1.k^2, a_1.k^3, a_1.k^4, a_1.k^5)$.

Daí, $S_6 = a_1.(1 + k + k^2 + k^3 + k^4 + k^5) = 10^8$.

Questão 14 – Letra D

Comentário: $a_5 = a_2.q^3 \Rightarrow \frac{1}{48} = \frac{1}{6}.q^3 \Rightarrow$

$q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Logo, $a_6 = a_5.q = \frac{1}{48}.\frac{1}{2} = \frac{1}{96}$.

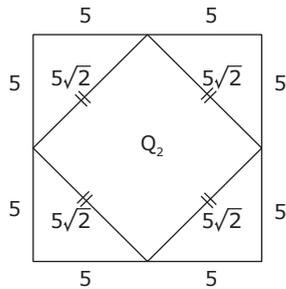
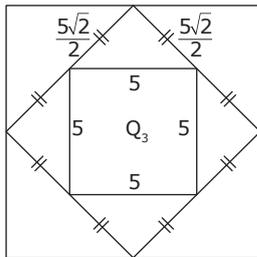
Questão 15 – Letra C

Comentário: Os divisores positivos de $3^{2\,004}$ são dados para a P.G. $(1, 3, 3^2, 3^3, ..., 3^{2\,004})$. Observe que há 2 005 termos.

Sendo $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, temos que:

$$S_{2\,005} = \frac{1\,(3^{2\,005} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{2\,005} - 1}{2}$$

Questão 17 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir:

Área de Q_2: $(5\sqrt{2})^2 = 50$

Área de Q_3: $5^2 = 25$

A sequência correspondente às áreas dos quadrados é dada por $100, 50, 25, \dfrac{25}{2}, ...$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200 \text{ m}^2$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Observe que o número de triângulos pretos em cada figura forma a progressão geométrica (1, 3, 9, ...). Portanto, na próxima figura, deverão existir 27 triângulos pretos, o que corresponde à alternativa C.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: O número de segmentos de reta presentes em cada linha **n** é dado pela P.G. $(1, 2, 4, 8, ..., 2^{n-1})$. Logo, na 10ª linha, temos:

$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 1.2^{10-1} \Rightarrow a_{10} = 512$

MÓDULO – E 21

Matrizes

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: Sabendo que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, temos:

$$A.Y + B.X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y \\ 8x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x^2 + 3y \\ y^2 + 8x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ y^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x(x^3 + 8) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

Portanto, $x.y = (-2).(-4) = 8$.

Questão 02 – Letra D

Comentário:

$$A.B^t = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & b \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $b = 4$ e $a - b = 3 \Rightarrow a = 7$.

Portanto, $a + b = 4 + 7 = 11$.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Efetuando o produto matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{tg}\,\alpha \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\text{tg}\,\alpha + 6\cos\beta = 0 \\ 6\text{tg}\,\alpha + 8\cos\beta = -2\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 3\text{tg}\,\alpha + 6\cos\beta = 0 \\ -3\text{tg}\,\alpha - 4\cos\beta = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$2\cos\beta = \sqrt{3} \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \beta = \frac{\pi}{6}\text{rad}.$$

Desse modo, $3\text{tg}\,\alpha + 6\cos\frac{\pi}{6} = 0 \quad \text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3} \quad \alpha = -\frac{\pi}{3}\text{rad}$ e, portanto, $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$ rad.

Questão 04 – Letra C

Comentário:

$$A.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & w & v \\ u & l & p \end{pmatrix}$.

Temos: $\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & w & v \\ u & l & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Logo, x = −1, t = 4 e u = 2 são elementos da primeira linha da transposta de **A**.

Questão 05 – Letra C

Comentário:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$a_{11} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
$a_{12} = 0$
$a_{21} = 0$
$a_{22} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Seja $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Temos que $A.A^{-1} = I$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & \frac{y}{2} \\ \frac{z}{4} & \frac{t}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $\frac{x}{2} = 1 \quad x = 2$; $\frac{y}{2} = 0 \quad y = 0$; $\frac{z}{4} = 0 \quad z = 0$; $\frac{t}{4} = 1 \quad t = 4$

Portanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário:

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ y & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & x+6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ y & z \end{pmatrix}$$

$x + 6 = 8$, $y = 6$, $z = 10$ $\Rightarrow$ $x = 2$, $y = 6$, $z = 10$

Portanto, x.y.z = 2.6.10 = 120.

Questão 02 – Letra A

Comentário:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $a_{31} = 3 - 1 = 2$, $a_{32} = 3 - 2 = 1$, $a_{33} = 3 + 3 = 6$

$a_{31} + a_{32} + a_{33} = 2 + 1 + 6 = 9$

Questão 04 – Letra B

Comentário:

$\underbrace{A_{4x3}.B_{3x4}}.C_{4x2} =$

$\underbrace{E_{4x4}.C_{4x2}} =$

P_{4x2}

A transposta de P_{4x2} é P^t_{2x4}.

Questão 07 – Letra A

Comentário:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^3 = A^2.A = I.A = A$

$A^4 = A^3.A = A.A = A^2 = I$

⋮

De modo geral, temos:

$A^n = A$, se **n** é ímpar
$A^n = I$, se **n** é par

Na soma $A + A^2 + A^3 + ... + A^{39} + A^{40}$, há 20 termos com expoente ímpar e 20 termos com expoente par. Logo:

$$20.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 20.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 20 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: A_{3xr}, B_{3xs}, C_{2xt} e $[(A - B).C]_{3x4}$

Para que A − B seja possível, r = s.

Como (A − B).C é ordem 3x4, temos que t = 4.

Além disso, (A − B).C = AC − BC.

Para que tais produtos sejam possíveis, r = s = 2.

Logo, r + s + t = 2 + 2 + 4 = 8.

Questão 10 – Letra E

Comentário:

(A − 4I).X = 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} - 4.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3x + 2y \\ -6x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Temos duas retas coincidentes.

$-3x + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$

O coeficiente angular é $\frac{3}{2}$.

Questão 11 – Letra C

Comentário: Seja a matriz $\begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ formada pelos preços por unidade de ferro, madeira e tijolo, de cima para baixo.

O custo por casa é dado por:

$$\begin{pmatrix} 6 & 20 & 18 \\ 5 & 22 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 371 \end{pmatrix}$$

Ou seja, cada casa do estilo moderno custa R$ 430,00 e cada casa do estilo colonial custa R$ 371,00, em termos de material.

Como são 2 casas do estilo moderno e 3 casas do estilo colonial, temos:

2(430) + 3(371) = 1 973 reais.

Questão 12 – Letra C

Comentário: A.B = I

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3x + y & -x + 2 \\ 15 + 3y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Logo, $\begin{cases} -x + 2 = 0 \\ 15 + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$.

Portanto, x + y = 2 – 5 = –3.

Questão 14 – Letra E

Comentário: Como $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, temos que:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a soma pedida é $a^2 + b^2 + 2ac + 2bd + c^2 + d^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2$.

Questão 16 – Letra C

Comentário: Se, a cada minuto, podem passar até 12 carros, temos que em 75 segundos (S_{23}) podem passar até $\frac{75s.12\,carros}{60s} = 15\,carros$. Como de 8h às 10h existem $\frac{120}{2} = 60$ períodos de 2 minutos, temos que podem passar até 15.60 = 900 automóveis no período considerado.

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: A média de cada matéria é a soma das notas dividido por 4, e a única matriz que possibilita esta condição é a da alternativa E.

$$\begin{pmatrix} 5{,}9 & 6{,}2 & 4{,}5 & 5{,}5 \\ 6{,}6 & 7{,}1 & 6{,}5 & 8{,}4 \\ 8{,}6 & 6{,}8 & 7{,}8 & 9{,}0 \\ 6{,}2 & 5{,}6 & 6{,}9 & 7{,}7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5{,}9 + 6{,}2 + 4{,}5 + 5{,}5}{4} \\ \frac{6{,}6 + 7{,}1 + 6{,}5 + 8{,}4}{4} \\ \frac{8{,}6 + 6{,}8 + 7{,}8 + 9}{4} \\ \frac{6{,}2 + 5{,}6 + 5{,}9 + 7{,}7}{4} \end{pmatrix}$$

MÓDULO – E 22

Determinantes

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: Como **a** e **b** são números positivos, temos:

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{a} \\ \sqrt{b} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{2} - \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$6\sqrt{2} - 2\sqrt{ab} = \sqrt{2} \Rightarrow 5\sqrt{2} = 2\sqrt{ab} \Rightarrow 50 = 4ab \Rightarrow ab = \frac{25}{2}$$

Então, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0 + 0 - ab) = ab = \frac{25}{2}$.

Questão 02 – Letra A

Comentário:

I. Verdadeira. Ao permutarmos duas filas paralelas de uma matriz quadrada A, obtemos uma matriz B, tal que det B = –det A.

II. Falsa. Como: $\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = 3. \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 3^3. \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 27.(-2) = -54 \neq -6$$

III. Verdadeira. Se uma matriz quadrada apresenta uma fila de zeros, então seu determinante é nulo.

IV. Verdadeira. Sabendo que uma matriz quadrada com duas filas paralelas proporcionais tem determinante nulo, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d + 2a & e + 2b & f + 2c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

Questão 03 – Letra B

Comentário: Multiplicando uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada por uma constante, seu determinante fica multiplicado por essa constante. Trocando-se duas filas paralelas de uma matriz quadrada, seu determinante fica multiplicado por –1. Para se obter, a partir de **M**, a matriz da alternativa B, foram trocadas as posições das linhas 1 e 3, a segunda linha foi multiplicada por 3 e a segunda coluna multiplicada por 2.

Portanto, o determinante foi multiplicado por (–1).2.3 = –6.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Trata-se de um determinante de Vandermonde. Seu valor é dado por:

(log 80 – log 8).(log 800 – log 8).(log 800 – log 80).

(log 8 000 – log 8).(log 8 000 – log 80).(log 8 000 – log 800) =

$$\log \frac{80}{8} .\log \frac{800}{8} .\log \frac{800}{80} .\log \frac{8\,000}{8} =$$

$$\log \frac{8\,000}{80} .\log \frac{8\,000}{800} =$$

log 10.log 100.log 10.log 1 000.log 100.log 10 = 12

Questão 05 – Letra C

Comentário: Sabe-se que $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Chamando de **A** a matriz dada, temos que:

$$\det(A) = -6 + 0 - 4 - \left(-\frac{2}{5} + 0 + 0\right) = -10 + \frac{2}{5} = -\frac{48}{5}$$

Portanto, $\det(A^{-1}) = -\dfrac{5}{48}$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ b+1 & b+2 & b+3 \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ b+1 & b+2 & b+3 \end{vmatrix}$$

Como as linhas 1 e 2 são iguais, o determinante é nulo para todos os valores de **a** e **b**.

Questão 03 – Letra B

Comentário:

$$A^t.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $\det(A^t.B) = \begin{vmatrix} -5 & -12 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 60 = 55.$

Questão 05 – Letra A

Comentário:

$\det(A - x.I) = 0$

$$A - x.I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - x.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 4-x \end{bmatrix}$$

$\det(A - x.I) = (1 - x)(4 - x) - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 2 = 0$

Soma das raízes $= -\dfrac{-5}{1} = 5$

Questão 06 – Letra A

Comentário: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow 2 - x^2 - x > 0 \Rightarrow$

$-x^2 - x + 2 > 0$ (inequação do 2º grau)

O conjunto solução é dado pelo intervalo]−2, 1[.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Calculando os determinantes das matrizes **A** e **B**, obtemos $\det A = -x^2 - x - 2x^2 = -3x^2 - x$ e $\det B = 3.1 - 1.2 = 1$. Pelo Teorema de Binet, temos que

$\det(A.B) = \det A.\det B = (-3x^2 - x).1 = -3x^2 - x$.

Sabendo que $\det(\lambda M) = \lambda^n.\det M$, com λ, real e **M** sendo uma matriz quadrada de ordem **n**, e $\det(M^t) = \det M$, vem $\det(2B^t) = 2^2.\det B^t = 4.\det B = 4.1 = 4$.

Além disso, $B + I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Logo, $\det(B + I) = 4.2 - 1.2 = 6$.

Por consequência, $-3x^2 - x + 6 = 4 \Rightarrow 3x^2 + x - 2 = 0$.

Segue, pelas relações entre coeficientes e raízes, que o produto de todos os valores reais de **x** que satisfazem a equação $\det(A.B) + \det(B + I) = \det(2B^t)$ é igual a $-\dfrac{2}{3}$.

Questão 09 – Letra E

Comentário: Como as matrizes são inversíveis, **x** e **y** não são nulos, então temos que:

$x = ad - bc$ e $y = -6ad + 6bc$

Logo, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{ad - bc}{-6ad + 6bc} = \dfrac{(ad - bc)}{-6(ad - bc)} = -\dfrac{1}{6}$.

Questão 12 – Letra D

Comentário:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\theta + 0 + 0 - (0 - \text{sen}^2\,\theta) = \cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$$

Portanto, $\log 1 = 0$.

MÓDULO – E 23

Sistemas lineares

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Podemos escrever o sistema como:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

x(−3) x(−2) (+)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 0x - 7y + 3z = -5 \\ 0x - 7y + 5z = 1 \end{cases}$$

x(−1) (+)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 0x - 7y + 3z = -5 \\ 0x + 0y + 2z = 6 \end{cases}$$

Logo, $2z = 6 \Rightarrow z = 3$.

Substituindo na 2ª equação, temos:

$-7y + 9 = -5 \Rightarrow y = 2$

Questão 02 – Letra D

Comentário:

$$\begin{array}{l} a+b+c=20 \\ a+0b-c=-5 \\ a+2b+4c=54 \end{array} \quad (-1)$$

$$\begin{array}{l} a+b+c=20 \\ 0a-b-2c=-25 \\ 0a+b+3c=34 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} a+b+c=20 \\ 0a-b-2c=-25 \\ 0a+0b+c=9 \end{array}$$

Substituindo o valor de **c** na 2ª equação, temos:

$-b - 18 = -25 \Rightarrow b = 7$

Questão 03 – Letra C

Comentário:

Para que a solução seja única, devemos ter $D \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} m & 3 & -1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 + 6 + 1 - (-m - 2m - 3) \neq 0 \Rightarrow$$

$-m^2 + 3m + 10 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$ ou $m \neq 5$

Questão 04 – Letra D

Comentário: Sejam **x**, **y** e **z**, respectivamente, os preços unitários das margaridas, lírios e rosas.

De acordo com as informações, obtemos o sistema

$$\begin{array}{l} 4x+2y+3z=42 \\ x+2y+z=20 \\ 2x+4y+z=32 \end{array} \sim \begin{array}{l} x+2y+z=20 \\ 4x+2y+3z=42 \\ 2x+4y+z=32 \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{l} x+2y+z=20 \\ -6y-z=-38 \\ -z=-8 \end{array} \sim \begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \\ z=8 \end{array}$$

Portanto, o resultado pedido é

$x + y + z = 2 + 5 + 8 =$ R$ 15,00

Questão 05 – Letra A

Comentário: Calculando o determinante dos coeficientes, temos: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6a + 6.$

Se $-6a + 6 \neq 0$ o sistema será possível e determinado, logo se $a \neq 1$ o sistema terá solução única.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário:

$$\begin{array}{l} x-y=3 \\ x+z=4 \\ x+4z=10 \end{array} \; x(-1) \quad \begin{array}{l} x-y=3 \\ x+z=4 \\ 0x+3z=6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-y=3 \\ x+z=4 \\ z=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2-y=3 \\ x=2 \\ z=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y=-1 \\ x=2 \\ z=2 \end{array}$$

Como $x = x_0$, $y = y_0$ e $z = z_0$, então $x_0 = 2$, $y_0 = -1$, e $z_0 = 2$.

Logo, $x_0 + y_0 + z_0 = 2 - 1 + 2 = 3$.

Questão 03 – Letra E

Comentário:

$$\begin{array}{l} 3x+y=3a+4b \\ (a-b)x+2y=8 \end{array}$$

Para que o sistema seja possível e indeterminado:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ a-b & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 - (a - b) = 0 \Rightarrow a - b = 6$$

$$\begin{array}{l} 3x+y=3a+4b \\ 6x+2y=8 \end{array} \; x(-2) \quad \begin{array}{l} 3x+y=3a+4b \\ 0x+0y=-2(3a+4b)+8 \end{array}$$

É necessário que:

$-2(3a + 4b) + 8 = 0 \Rightarrow 3a + 4b = 4$

Assim, temos:

$$\begin{array}{l} a-b=6 \\ 3a+4b=4 \end{array} \; x(4) \quad \begin{array}{l} a-b=6 \\ 7a+0b=28 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4-b=6 \\ a=4 \end{array} \quad \begin{array}{l} b=-2 \\ a=4 \end{array}$$

Questão 04 – Letra E

Comentário: Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+3y+2z=250 \\ 2x+5y+3z=420 \\ 3x+5y+2z=430 \end{cases} \; (-2),\ (-3) \longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+3y+2z=250 \\ 0-y-z=-80 \\ 0-4y-4z=-320 \end{cases} \; (-1),\ (-1/4) \longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+3y+2z=250 \\ 0+y+z=80 \\ 0+y+z=80 \end{cases} \; (-1) \longleftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=250 \\ 0+y+z=80 \end{cases}$$

S. P. I.

Portanto, o determinante dos coeficientes é zero, e, para determinar a quantidade dos materiais utilizados, é necessário saber previamente a quantidade de um desses materiais. Logo, a única afirmação correta é a IV.

Questão 05 – Letra A

Comentário:

$$\begin{pmatrix} 3 & -m \\ m+2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = m.\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x - my \\ (m+2)x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ -m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - my = 3m \\ (m+2)x - y = -m \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (–m) e somando as duas, temos:

$$\begin{array}{l} 3x - my = 3m \\ -(m^2 + 2m)x + my = m^2 \\ \hline (-m^2 - 2m + 3)x = m^2 + 3m \end{array}$$

Para que o sistema tenha mais de uma solução, devemos ter uma equação da forma 0.x = 0. Portanto:

$$\begin{cases} -m^2 - 2m + 3 = 0 & m = -3 \text{ ou } m = 1 \\ m^2 + 3m = 0 & m = 0 \text{ ou } m = -3 \end{cases}$$

Para atender às duas condições, temos m = –3, ou seja, um divisor negativo de 12.

Questão 07 – Letra A

Comentário:

$$\begin{cases} 3v + 2a + 4b = 88 \\ 2v + 5b = 64 \\ 4v + 1a = 58 \end{cases}$$

$$\text{Resolvendo o sistema, temos: } \begin{cases} v = 12 \\ a = 10. \\ b = 8 \end{cases}$$

Portanto, o valor do prato branco é 80% do valor do prato amarelo.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Sejam **x**, **y** e **z**, respectivamente, os números de embalagens de 20 L, 10 L e 2 L. Do enunciado e da tabela, obtemos:

$$\begin{cases} 20x + 10y + 2z = 94 \\ 10x + 6y + 3z = 65 \\ y = 2x \end{cases} \sim \begin{cases} 20x + z = 47 \\ 22x + 3z = 65 \\ y = 2x \end{cases} \sim \begin{cases} -60x - 3z = -141 \\ 22x + 3z = 65 \\ y = 2x \end{cases}$$

Adicionando as duas primeiras equações do último sistema, temos: –38x = –76 ⇒ x = 2.

Logo, da segunda equação do sistema, encontramos

3z = 65 – 22x ⇒ 3z = 65 – 22.2 ⇒ z = 7.

Portanto, como z = n = 7 e 77 = 7.11, então **n** é um divisor de 77.

Questão 13 – Letra D

Comentário: Sejam **H**, **L** e **Z** os valores das mesadas de Huguinho, Luizinho e Zezinho, respectivamente.

Então, temos:

$$\begin{array}{l} x(-2) \quad x(-2) \\ \end{array} \begin{cases} H + L + Z = 45 \\ 2H + L + Z = 55 \\ 2H + 2L + Z = 70 \end{cases} \quad \begin{cases} H + L + Z = 45 \\ 0H - L - Z = -55 \\ 0H + 0L - Z = -20 \end{cases}$$

–Z = –20 ⇒ Z = 20

–L – Z = –35 ⇒ –L – 20 = –35 ⇒ L = 15

H + L + Z = 45 ⇒ H + 15 + 20 = 45 ⇒ H = 10

Portanto, H.L.Z = 10.15.20 = 3 000.

Questão 15 – Letra E

Comentário:

$$\begin{cases} (m+1)x - y = 2 \\ 3x + 3y = 2n \end{cases}$$

Para que as retas sejam paralelas coincidentes, é necessário que:

$$\frac{m+1}{3} = -\frac{1}{3} = \frac{2}{2n} \Rightarrow \begin{cases} 3m + 3 = -3 \\ -2n = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} m = -2 \\ n = -3 \end{cases}$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 30\,000 \\ 0{,}6A + 1{,}2B = 25\,200 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

A = 18 000 e B = 12 000

Observe que o total aplicado no ativo **B** (R$ 12 000,00) representa 40% do total aplicado (R$ 30 000,00).

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Sejam **x** e **y** os números de carros roubados das marcas **X** e **Y**, respectivamente.

Temos:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 0{,}6.150 = 90 \end{cases}$$

Substituindo x = 2y na 2ª equação, obtemos:

3y = 90 ⇒ y = 30

MÓDULO – E 24

Binômio de Newton

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra A

Comentário: O termo geral **T** do binômio $(x + a)^n$ é dado por:

$$T = \binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p \Rightarrow T = \binom{11}{p}.x^{11-p}.a^p = 1\ 386x^5$$

Temos que:

$$11 - p = 5 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow \binom{11}{6}.x^5.a^6 = 1\ 386x^5 \Rightarrow$$

$$\frac{11!}{5!.6!}.x^5.a^6 = 1\ 386x^5 \Rightarrow 462.a^6 = 1\ 386 \Rightarrow a = \sqrt[6]{3}$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: O termo geral é dado por:

$$T = \binom{7}{p}.x^{7-p}.\left(\frac{1}{x}\right)^p = \binom{7}{p}.x^{7-2p}$$

Como $7 - 2p = 1 \Rightarrow p = 3$

Substituindo na expressão, temos:

$$\binom{7}{3}.x = \frac{7!}{4!.3!}.x = 35x$$

O coeficiente é igual a 35.

Questão 03 – Letra B

Comentário: $(x^2 + 3x - 3)^{50}$

Basta fazermos $x = 1$ para obtermos a soma dos coeficientes do polinômio.

Temos que:

$(1^2 + 3.1 - 3)^{50} = 1$

Questão 04 – Letra D

Comentário: O termo geral é dado por:

$$T = \binom{8}{p}.(2x)^{8-p}.(-1)^p$$

i) Terceiro termo: $p = 2$

$$T_3 = \binom{8}{2}.(2x)^{8-2}.(-1)^2 \Rightarrow T_3 = \frac{8!}{6!.2!}.(2x)^6 \Rightarrow$$

$$T_3 = 1\ 792x^6$$

ii) Quarto termo: $p = 3$

$$T_4 = \binom{8}{3}.(2x)^{8-3}.(-1)^3 \Rightarrow T_4 = \frac{8!}{5!.3!}.(2x)^5.(-1) \Rightarrow$$

$$T_4 = -1\ 792x^5$$

Portanto, $\frac{T_4}{T_3} = \frac{-1\ 792x^5}{1\ 792x^6} = -\frac{1}{x}$.

Questão 05 – Letra C

Comentário: O termo geral é dado por:

$$T = \binom{100}{p}.x^{100-p}.(-1)^p$$

i) Segundo termo: $p = 1$

$$T_2 = \binom{100}{1}.x^{100-1}.(-1)^1 \Rightarrow T_2 = -100x^{99}$$

ii) Quarto termo: $p = 3$

$$T_4 = \binom{100}{3}.x^{100-3}.(-1)^3 \Rightarrow T_4 = \frac{100!}{97!.3!}.x^{97}.(-1) \Rightarrow$$

$$T_4 = -161\ 700x^{97}$$

Soma dos coeficientes: $-100 - 161\ 700 = -161\ 800$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: A soma dos elementos da linha **n** é igual a 2^n.

A soma dos elementos da linha $n + 1$ é igual a 2^{n+1}.

Temos, portanto, $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2^n.2 = 3.2^n$.

Questão 02 – Letra E

Comentário:

$$\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \frac{n^2 - n}{2}$$

Pela Relação de Stiffel:

$$\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \binom{n}{6}$$

Temos:

$$\binom{n}{6} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

Como os binomiais são complementares, temos:

$n = 6 + 2 = 8$

Questão 03 – Letra C

Comentário:

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^8$$

$$\binom{8}{p}x^{8-p}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^p = \binom{8}{p}x^{8-3p}$$

Como queremos o coeficiente de x^5, temos:

$8 - 3p = 5 \Rightarrow p = 1$

Logo:

$$T = \binom{8}{1}x^5 = 8x^5$$

O coeficiente é igual a 8.

Questão 05 – Letra E

Comentário: $p(x) = (x - 1)(x + 3)^5$

1º passo: Determinar o termo de grau 2 no polinômio $(x + 3)^5$:

$$\binom{5}{p} x^{5-p}.3^p$$

Fazendo: $5 - p = 2 \Rightarrow p = 3$

Então, $\binom{5}{3} x^2.3^3 = \dfrac{5!}{3!.2!}.x^2.27 = 270x^2$.

Multiplicando esse termo pelo termo **x**, proveniente de $(x - 1)$, obtemos $270x^3$.

2º passo: Determinar o termo de grau 3 no polinômio $(x + 3)^5$:

$$\binom{5}{p} x^{5-p}.3^p$$

Fazendo: $5 - p = 3 \Rightarrow p = 2$

Então, $\binom{5}{2} x^3.3^2 = \dfrac{5!}{2!.3!}.x^3.9 = 90x^3$.

Multiplicando esse termo por -1, proveniente de $(x - 1)$, obtemos $-90x^3$.

Portanto, temos: $270x^3 - 90x^3 = 180x^3$

O coeficiente é igual a 180.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Basta fazermos $x = 1$ e $y = 1$. Temos:

$(2.1 + 1)^5 = 3^5 = 243$

Questão 08 – Letra B

Comentário: O termo geral do binômio é dado por

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}.\left(\frac{2}{x^2}\right)^{n-p}.x^p = \binom{n}{p}.\frac{2^{n-p}}{x^{2n-2p}}.x^p = \binom{n}{p}.2^{n-p}.x^{3p-2n}$$

Sabendo que o termo independente de **x** é o sétimo, segue que $p = 6$ e, assim, $T_{6+1} = \binom{n}{6}.2^{n-6}.x^{18-2n}$.

Daí, impondo $18 - 2n = 0$, concluímos que $n = 9$ e, portanto,

$$T_7 = \binom{9}{6}.2^{9-6} = \frac{9!}{6!.3!}.2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}.8 = 672$$

Questão 09 – Letra E

Comentário:

$(a + b)^{10} = 1\ 024 = 2^{10} \Rightarrow a + b = 2$

$$T = \binom{10}{p} a^{10-p}.b^p$$

6º termo: $p = 5$

$$\binom{10}{5} a^5.b^5 = 252 \Rightarrow \frac{10!}{5!.5!}.a^5.b^5 = 252 \Rightarrow$$

$252.(ab)^5 = 252 \Rightarrow ab = 1$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 2 - a \\ ab = 1 \end{cases}$$

$a(2 - a) = 1 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$

Logo, $b = 1$.

Questão 11 – Letra B

Comentário: $(1 + x + x^2)^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_{2n}x^{2n}$

Fazendo $x = 1$, temos:

$(1 + 1 + 1^2)^n = A_0 + A_1.1 + A_2.1^2 + ... + A_{2n}.1^{2n} \Rightarrow$

$3^n = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_{2n}$

Questão 12 – Letra C

Comentário:

$$\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} = 254$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} = 254 \Rightarrow$$

$$2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} = 254 \Rightarrow$$

$2^n = 256 \Rightarrow n = 8$

Questão 18 – Letra B

Comentário:

I. Falso. O domínio é dado por $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A imagem é dada por $Im = \{1, 6, 15, 20\}$. Portanto, o número de elementos do domínio é superior ao número de elementos da imagem.

II. Falso. $C_{6,1} = 6$, $C_{6,2} = 15$, $C_{6,3} = 20$, $C_{6,6} = 1$

$C_{6,1} + C_{6,2} = 21$ e $C_{6,3} + C_{6,6} = 21$

Logo, $C_{6,1} + C_{6,2} = C_{6,3} + C_{6,6}$.

III. Falso. $(1 + h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$

Mas $1 + C_{3,0} + C_{3,1}h + C_{3,2}h^2 + C_{3,3}h^3 = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$.

Logo, $(1 + h)^3 < 1 + C_{3,0} + C_{3,1}h + C_{3,2}h^2 + C_{3,3}h^3$.

IV. Verdadeiro. $(r + h)^6 = C_{6,0}r^6h^0 + C_{6,1}r^5h^1 + C_{6,2}r^4h^2 +$

$C_{6,3}r^3h^3 + C_{6,4}r^2h^4 + C_{6,5}r^1h^5 + C_{6,6}r^0h^6 =$

$r^6 + 6r^5h + 15r^4h^2 + 20r^3h^3 + 15r^2h^4 + 6rh^5 + h^6$